Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE, TÜBINGEN
K. KNOPP†, TÜBINGEN
R. NEVANLINNA, HELSINKI
E. SCHMIDT, BERLIN
F. K. SCHMIDT, HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT W. SÜSS

67. BAND, 5. (SCHLUSS-)HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 22. JULI 1957)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1957

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote u. ä., von den Zeitschriftenheften, von einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgendmöglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21b.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28/30. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

67. Band **Inhalt** 5. (Schluß-)Heft

Seite

Brauer, G., Some Summation Matrices of Hausdorff Type 397
Srivastava, K. J., Fractional integration and Meijer transform 404
Endler, O., Differentiation in algebraischen Funktionenkörpern von n Variablen . 413
Schauffler, R., Die Assoziativität im Ganzen, besonders bei Quasigruppen 428
Salzmann, H., Topologische projektive Ebenen 436
Weston, J. D., On integration with respect to a measure 467
Moppert, K.-F., Funktionenscharen im L_2 474
Huppert, B., Lineare auflösbare Gruppen 479

Brauer, G.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 397—403 (1957)

Some Summation Matrices of Hausdorff Type *)

By
George Brauer

1. Introductory remarks. The purpose of this paper is to study certain methods of assigning generalized limits to divergent sequences of complex numbers. All methods considered here are represented by infinite triangular matrices $A = (a_{n,k})$. The A-transform $A\{s_n\}$ of the sequence $\{s_n\}$ is the sequence t_n where

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} s_k .$$

If the sequence t_n converges to some complex number σ, then A is said to evaluate $\{s_n\}$ to σ, and $\{s_n\}$ is said to lie in the convergence field of A. If the matrix A evaluates every convergent sequence to its limit, it is said to be regular. Toeplitz [6] proved that for a matrix $A = (a_{n,k})$ to be regular it is necessary and sufficient that

(i) $$\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

(ii) $$\sup \sum_{k=0}^{n} |a_{n,k}| < \infty,$$

(iii) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = 1 .$$

The quantity $\limsup \sum_{k=0}^{n} |a_{n,k}|$ will be called the norm of A and will be written $\|A\|$. In order that a triangular matrix transform every bounded sequence into a bounded sequence it is necessary and sufficient that $\|A\| < \infty$.

An interesting class of summation matrices is the class of Hausdorff matrices, that is, the class of matrices of the form $\varrho\mu\varrho^{-1}$, where μ is an arbitrary diagonal matrix and ϱ is the self-reciprocal Euler matrix with elements $(\varrho_{n,k})$ given by the relations

$$\varrho_{n,k} = (-1)^k \binom{n}{k}.$$

The sequence $\{\mu_n\}$ appearing on the main diagonal of μ shall be said to generate the Hausdorff matrix $\varrho\mu\varrho^{-1}$.

---

*) Submitted as a dissertation in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy at the University of Michigan. The author wishes to thank Professor George Piranian for many helpful suggestions.

The theory of Hausdorff matrices is developed in [2]. It is shown there that if $\{\mu_n\}$ generates a Hausdorff matrix of finite norm, then there exists a function, $t(u)$, of bounded variation on $0 \leq u \leq 1$ which satisfies the equations

$$\mu_n = \int_0^1 u^n \, dt(u), \qquad n = 0, 1, \ldots .$$

In terms of $t(u)$, the elements of $\varrho^{-1}\mu\varrho$ are given by the equations

$$a_{n,k} = \binom{n}{k} \int_0^1 u^k (1-u)^{n-k} \, dt(u).$$

The best-known regular Hausdorff matrix is the Cesàro matrix. It is generated by the sequence $\{1/(n+1)\}$, and its elements $c_{n,k}$ are given by the relations

$$c_{n,k} = 1/(n+1), \qquad k \leq n, \; n = 0, 1, \ldots,$$

$$c_{n,k} = 0, \qquad k > n.$$

In [3] Hausdorff extends his theory to some matrices of the form $A\mu A^{-1}$ where μ is a diagonal matrix and A is a normal matrix. I shall call a matrix of this form a matrix of HAUSDORFF; the sequence appearing on the main diagonal of μ will always be denoted by $\{\mu_n\}$; this sequence will be said to generate the matrix $A\mu A^{-1}$.

In this paper I shall study certain classes of matrices of Hausdorff type. Unlike many regular Hausdorff matrices, the regular matrices of Hausdorff type considered here have very small convergence fields, and, in most cases, they evaluate no divergent sequences. I do not know the full reason for the situation. I believe that it is partly due to the fact that for most matrices $A\mu A^{-1}$ studied here, the matrix A is regular, unlike the Euler matrix.

We shall use the following simple facts about matrices of Hausdorff type throughout the paper.

(a) If μ is a diagonal matrix, A is a normal matrix, and $\|A\mu A^{-1}\| < \infty$ then $\{\mu_n\}$ is a bounded sequence.

(b) If μ is a diagonal matrix, A is a regular normal matrix, and $A\mu A^{-1}$ is regular, then $A\{\mu_n\} \to 1$.

(c) If μ is a diagonal matrix, A is a normal matrix whose reciprocal is regular, and $A\mu A^{-1}$ is regular, then $\mu_n \to 1$.

To prove (a) we let $A = (a_{n,k})$ $A^{-1} = (\alpha_{n,k})$, and $A\mu A^{-1} = (d_{n,k})$. Then $d_{n,n} = a_{n,n}\,\mu_n\,\alpha_{n,n} = \mu_n$ and the result follows.

To prove (b) we note that since A and $A\mu A^{-1}$ are regular, the matrix $(A\mu A^{-1})A = A\mu$ is regular. Consequently, $\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\,\mu_k \to 1$ as $n \to \infty$, that is, $A\{\mu_n\} \to 1$.

To prove (c) we observe that our assumptions imply that $\mu A^{-1}=A^{-1}$ $(A\mu A^{-1})$ is regular. Since $\mu A^{-1}=(\mu_n\alpha_{n,k})$ we have $\lim_{n\to\infty}\mu_n\Big(\sum_{k=0}^{n}\alpha_{n,k}\Big)=1$. Since $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\alpha_{n,k}=1$, $\mu_n\to 1$.

1. *The Matrices* $E_\alpha\mu E_\alpha^{-1}$: Let α denote any complex number other than 0. Then the Euler Knopp matrix of order α, which we denote by E_α, is defined as the Hausdorff matrix generated by the sequence $\{\alpha^n\}$; its elements are given by the formula

$$e_{n,k}=\binom{n}{k}\alpha^k(1-\alpha)^{n-k}$$

cf. ([5] pp. 245).

THEOREM 2.1. *The elements* $b_{n,k}$ *of the matrix* $E_\alpha\mu E_\alpha^{-1}$ *are given by the formula*

$$b_{n,k}=(1-\alpha)^{n-k}\binom{n}{k}\Delta^{n-k}\mu_k. \tag{1}$$

Proof. Let $E_\alpha^{-1}=(\vartheta_{n,k})$. We then have

$$\vartheta_{n,k}=\binom{n}{k}(\alpha^{n-k}-1)/\alpha^n$$

and thus

$$\begin{aligned}
b_{n,k}&=\sum_{j=k}^{n}e_{n,j}\mu_j\vartheta_{j,k}\\
&=\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}\alpha^j(1-\alpha)^{n-j}\mu_j\binom{j}{k}(\alpha-1)^{j-k}/\alpha^j\\
&=\binom{n}{k}(1-\alpha)^{n-k}\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j=k}\binom{n-k}{n-j}\mu_j\\
&=(1-\alpha)^{n-k}\binom{n}{k}\Delta^{n-k}\mu_k.
\end{aligned}$$

If $\alpha=0$, then the matrix $E_\alpha\mu E_\alpha^{-1}$ is undefined. However if α is set equal to 0 in (1), then the resulting expression yields the elements of the Hausdorff matrix generated by $\{\mu_n\}$.

It is clear that if $\|E_\alpha\mu E_\alpha^{-1}\|<\infty$, and β is a complex number such that $|1-\beta|\leq|1-\alpha|$, then $\|E_\beta\mu E_\beta^{-1}\|<\infty$. In particular, if $\{\mu_n\}$ generates a Hausdorff matrix of finite norm, and $|1-\alpha|\leq 1$, then $\|E_\alpha\mu E_\alpha^{-1}\|<\infty$.

The following result is an immediate consequence of Theorem 2.1.

THEOREM 2.2. *If* $\|E_\alpha\mu E_\alpha^{-1}\|<\infty$, *then*

$$\Delta^r\mu_n=O(n^{-r}),\qquad r=0,1,\ldots.$$

THEOREM 2.3. *If* $\alpha>0$ *and* $E_\alpha\mu E_\alpha^{-1}=(b_{n,k})$ *is regular, then* $\mu_n\to 1$.

Proof. If $\alpha\geq 1$, then E_α^{-1} is regular and it follows from (c) on p. 398 that $\mu_n\to 1$. If $\alpha<1$, then E_α is regular. By (b) on p. 398, $E_\alpha\{\mu_n\}\to 1$. Since $\Delta\mu_n=O(1/n)$ by Theorem 2.2 it follows that $\mu_n\to 1$ (cf. [5], pp. 139—141).

THEOREM 2.4. *If* $\alpha>0$ *and* $E_\alpha \mu E_\alpha^{-1}=(b_{n,k})$ *is regular, then*

$$\lim_{n\to\infty} b_{n,n-r}=0, \qquad r=1,2,\ldots.$$

Proof. It is sufficient to show that $\Delta^r \mu_n = o(n^{-r})$ for all positive integers r. To accomplish this we require two lemmas.

LEMMA A. *If* $\alpha \geqq 0$ *and* $\{u_n\}$ *is a sequence such that*

(i) $$u_n = o(n^{-\alpha}),$$

(ii) $$\Delta^2 u_n = O(n^{-\alpha-2}),$$

then

$$\Delta u_n = o(n^{-\alpha-1}).$$

Proof. We have

$$u_{n+h} = u_n - h\,\Delta u_n + \sum_{j=0}^{h-2} (h-j-1)\,\Delta^2 u_{n+j}$$

so that

(1) $$|\Delta u_n| \leqq (1/h)\Big[|u_{n+h}-u_n| + h^2 \max_{0\leqq j\leqq h} |\Delta^2 u_{n+j}|\Big].$$

Let ε be an arbitrary positive number and let N be chosen so large that

$$|u_N - u_n| < \varepsilon\, n^{-\alpha} \qquad \text{for} \quad n \geqq N.$$

If we set $h=[n\sqrt{\varepsilon}]$, then, by (1) we have[1])

$$|\Delta u_n| < (M+1)\sqrt{\varepsilon}\, n^{-\alpha-1}, \qquad \text{where} \qquad M = \sup |n^{\alpha+2}\Delta^2 u_n|.$$

Since ε is arbitrary, we may conclude that $\Delta u_n = o(n^{-\alpha-1})$.

LEMMA B. *If* v_n *is a null sequence such that*

$$\Delta^r v_n = O(n^{-r}) \qquad r=1,2,\ldots,$$

then

$$\Delta^r v_n = o(n^{-r}) \qquad r=1,2,\ldots.$$

Proof. We use mathematical induction. To show that $\Delta v_n = o(1/n)$ we use Lemma A with $\alpha=0$, $u_n=v_n$. Let us suppose that $\Delta^{r_0} v_n = o(n^{-r_0})$. If we apply Lemma A with $\alpha=r_0$, $u_n=\Delta^{r_0}v_n$, we see that $\Delta^{r_0+1}v_n = \Delta(\Delta^{r_0}v_n) = o(n^{-r_0-1})$. Hence the induction is complete.

To complete the proof of Theorem 2.4 we need only apply Lemma B with $u_n=\mu_n-1$.

THEOREM 2.5. *If* $\alpha>0$, $E_\alpha \mu E_\alpha^{-1}$ *is a regular matrix, and* β *is a complex number such that* $|1-\beta|<|1-\alpha|$, *then* $E_\beta \mu E_\beta^{-1}$ *is a regular matrix which evaluates no divergent sequences. Moreover* $E_\beta \mu E_\beta^{-1}$ *transforms every bounded sequence* $\{s_n\}$ *into a sequence which differs from* $\{s_n\}$ *by a null sequence.*

Proof. Let $E_\alpha \mu E_\alpha^{-1}=B=(b_{n,k})$ and let $E_\beta \mu E_\beta^{-1}=B'=(b'_{n,k})$. Then $b'_{n,k}=[(1-\beta)/(1-\alpha)]^{n-k} b_{n,k}$. Let ε be an arbitrary positive number, and let

[1]) $[x]$ denotes the greatest integer less than x.

R be a positive integer such that $[(1-\beta)/(1-\alpha)]^R < \varepsilon$. Now let N be chosen so that for $n \geqq N$, $k > n-R$

$$|b_{n,k}| \leq \varepsilon/R,$$

and

$$\sum_{k=0}^{n} |b_{n,k}| \leq \|B\| + 1.$$

For $n \geqq N$ we have

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} |b'_{n,k}| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left|\left(\frac{1-\beta}{1-\alpha}\right)^{n-k} b_{n,k}\right| \\ &\leq \left|\frac{1-\beta}{1-\alpha}\right|^R \sum_{k=0}^{n-R} |b_{n,k}| + \sum_{k=n-R+1}^{n-1} |b_{n,k}| \\ &\leq (\|B\| + 1)\,\varepsilon + R \cdot \varepsilon/R = (\|B\| + 2)\,\varepsilon.\end{aligned}$$

Since ε is an arbitrary positive number,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} |b'_{n,k}| = 0.$$

Also

$$\lim_{n\to\infty} b'_{n,n} = \lim_{n\to\infty} \mu_n = 1.$$

Therefore B' is regular, and it follows from a theorem of AGNEW ([*1*], pp. 245 to 246), that B' evaluates no divergent sequences.

Let $\{s_n\}$ be a bounded sequence and let $t_n = B'\{s_n\}$. Then

$$t_n = \sum_{k=0}^{n-1} b'_{n,k}\, s_k + b'_{n,n}\, s_n.$$

Since $\{s_n\}$ is a bounded sequence, $\sum_{k=0}^{n-1} b'_{n,k} s_k$ tends to 0. Also, since $b_{n,n}$ tends to 1, $\{s_n - t_n\}$ is a null sequence.

It remains an open question whether there exists a positive number α and a sequence $\{\mu_n\}$ such that the matrix $E_\alpha \mu E_\alpha^{-1}$ is regular and evaluates a divergent sequence.

THEOREM 2.6. *If* $|1-\alpha| > 1$ *and* $E_\alpha \mu E_\alpha^{-1}$ *is regular, then it is the identity matrix.*

Proof. Let ϱ denote the Euler matrix and let $\varrho \mu \varrho^{-1} = A = (a_{n,k})$. Then

$$a_{n,k} = \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \mu_k.$$

If we let $E_\alpha \mu E_\alpha^{-1} = B = (b_{n,k})$

$$a_{n,k} = \frac{b_{n,k}}{(1-\alpha)^{n-k}},$$

and hence

$$|a_{n,k}| < |b_{n,k}|.$$

Since $||B|| < \infty$, A is a Hausdorff matrix of finite norm. Consequently, there exists a function $t(u)$, of bounded variation in the interval $0 \leq u \leq 1$, such that

$$a_{n,k} = \binom{n}{k} \int_0^1 u^k (1-u)^{n-k} \, dt(u)$$

and, for each number p such that $0 < p < 1$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{0 \leq k \leq pn} |a_{nk}| = \int_0^p |dt(u)|$$

cf. ([2], pp. 104—109).

Let p denote a fixed number in $[0, 1)$ and let ε be an arbitrary positive number. Then there exists an integer N such that if $n \geq N$, then

$$\sum_{0 \leq k \leq pn} |a_{n,k}| \geq \int_0^p |dt(u)| - \varepsilon.$$

Hence

$$\sum_{0 \leq k \leq pn} |b_{n,k}| \geq |1-\alpha|^{n(1-p)} \left[\int_0^p |dt(u)| - \varepsilon \right].$$

Since $\sum_{k=0}^{n} |b_{n,k}|$ is bounded and the first member on the right tends to infinity the second factor cannot be positive for any value of p. Since ε is arbitrary, $\int_0^p |dt(u)| = 0$ for $0 \leq p < 1$. Hence $t(u)$ is constant except for a possible saltus at $t = 1$. The result follows from the formula for $b_{n,k}$.

3. The Matrices $C_m \mu C_m^{-1}$. For each nonnegative integer m the matrix $C_m \mu C_m^{-1}$ is defined as the Hausdorff matrix generated by the sequence $\left\{1 \Big/ \binom{n+m}{n}\right\}$ (cf. [2], pp. 82—83). In this section I shall list the main results on matrices $C_m \mu C_m^{-1}$, where m always denotes a nonnegative integer. For brevity we shall denote $C_m \mu C_m^{-1}$ by $Q^{(m)}$ and its elements by $(q_{n,k}^{(m)})$.

THEOREM 3.1. *For each non-negative integer m, the elements of $Q^{(m)}$ are given by*

$$(1) \qquad q_{n,k}^{(m)} = \left(\prod_{i=1}^{m} \frac{k+i}{n+i} \right) \sum_{j=k}^{k+m} (-1)^{j-k} \binom{m}{j-k} \binom{n-j+m-1}{n-j} \mu_j,$$

$$(2) \qquad q_{n,k}^{(m)} = \left(\prod_{i=1}^{m} \frac{k+i}{n+i} \right) \Delta^m \left[\binom{n-k+m-1}{n-k} \mu_k \right],$$

$$(3) \qquad q_{n,k}^{(m)} = \left(\prod_{i=1}^{m} \frac{k+i}{n+i} \right) \sum_{r=0}^{m-1} \binom{m}{r} \binom{n-k+m-r-1}{n-k} \Delta \mu_{k+r}^{m-r}.$$

The following relation exists between the elements of $C_m \mu C_m^{-1}$ and those of $C_{m-1} \mu C_{m-1}^{-1}$.

$$(4) \qquad q_{n,k}^{(m)} = \frac{(k+m)(n-k+m-1) q_{n,k}^{(m-1)} - (k+1)(n-k-1) q_{n,k+1}^{(m-1)}}{(m-1)(n+m)}$$

and this formula enables us to prove

THEOREM 3.2. *If* $m \geq 1$, *and* $\|C_m \mu C_m^{-1}\| < \infty$, *then* $\|C_{m-1} \mu C_{m-1}^{-1}\| < \infty$.

The relation (4) also helps us to obtain the following result:

THEOREM 3.3. *If* $m > 1$ *and* $\|Q^{(m)}\| < \infty$ *then*

$$\Delta^p \mu_n = O(n^{-p}), \qquad p = 0, 1, \ldots, m-1.$$

If $m > 1$ and $Q^{(m)}$ is regular then $C_m\{\mu_n\} \to 1$. By the above result $\Delta \mu_n = O(1/n)$. Using a well known Tauberian theorem we obtain

THEOREM 3.4. *If* $m > 1$ *and* $Q^{(m)}$ *is regular, then* $\mu_n \to 1$.

Using Theorems 3.3 and 3.4 together with (3) applied to $(Q^{(m)})^{-1}$ we obtain

THEOREM 3.5. *If* $m > 1$ *and* $Q^{(m)}$ *is regular, then it evaluates no devergent sequences. A regular matrix* $C_1 \mu C_1^{-1}$ *evaluates divergent sequences if and only if* 0 *is a cluster value of* $\{\mu_n\}$.

References

[1] AGNEW, R. P.: On Equivalence of Methods of Evaluation of Sequences. Tôhoku Math. J. **35**, 244—252 (1935). — [2] HAUSDORFF, FELIX: Summationsmethoden und Momentfolgen. I. Math. Z. **9**, 74—109 (1921). — [3] HAUSDORFF, FELIX: Summationsmethoden und Momentfolgen. II. Math. Z. **9**, 280—299 (1921). — [4] KNOPP, KONRAD: Über das Eulersche Summierungsverfahren. I. Math. Z. **15**, 226—253 (1922). — [5] KNOPP, KONRAD: Über das Eulersche Summierungsverfahren. II. Math. Z. **18**, 125—156 (1923). — [6] TOEPLITZ, OTTO: Über allgemeine lineare Mittelbildungen. Prace Mat-Fiz. **22**, 113—119 (1911).

University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota, USA

(Eingegangen am 28. Mai 1956)

SRIVASTAVA, K. J.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 404—412 (1957)

Fractional integration and Meijer transform

By

KRISHNA JI SRIVASTAVA

1. In 1940 ERDÉLYI and KOBER [*1–2* and *3–4*] used certain operators of fractional integration and differentiation to develope the theory of the well-known Hankel transform of functions belonging to the class $L_p(0, \infty)$.

The object of this paper is to apply the Erdélyi-Kober operators of fractional integration and differentiation to develope the theory of Meijer transform and to prove a number of theorems connecting Meijer transforms of different orders.

MEIJER [*5*] in 1940 defined his transform by the integral equation

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2},m}(st)\,(st)^{-k-\frac{1}{2}} f(t)\,dt, \tag{1.1}$$

and its inverse

$$f(t) = \operatorname*{Lt}_{\lambda\to\infty} \frac{\Gamma(1-k+m)}{2\pi i\,\Gamma(1+2m)} \int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} e^{\frac{1}{2}st} M_{k-\frac{1}{2},m}(st)\,(st)^{k-\frac{1}{2}} F(s)\,ds \tag{1.2}$$

where $M_{k,m}(z)$ and $W_{k,m}(z)$ are the two "Whittaker Functions".

We will denote (1.1) symbolically as

$$f(t) \overset{\substack{k+\frac{1}{2}\\ m}}{\longrightarrow} F(s),$$

and $F(s)$ will be called the Meijer transform of $f(t)$.

For $k = \pm m$, (1.1) reduces to the classical Laplace transform

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt.$$

R. S. VARMA [*10*] in 1951 defined a similar transform by the integral equation

$$f(s) = \int_0^\infty (st)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k,m}(st)\,g(t)\,dt. \tag{1.3}$$

If we take, $m = 0$, $k = \frac{1}{2}$, the above integral reduces to Laplace transform.

K. M. SAKSENA [*8*], [*9*] later gave the inversion formulae for this transform and studied some of its properties.

If we replace k by $k+\frac{1}{2}$ and $g(t)$ by $t^{-k-m}\Phi(t)$ we find that (1.3) reduces to the well-known MEIJER's transform defined in (1.1).

For the sake of convenience I define the operators of fractional integration and differentiation,

$$I^{+}_{\eta,\alpha} f = \frac{z^{-\eta-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z-t)^{\alpha-1} t^{\eta} f(t)\, dt, \tag{1.4}$$

$$K^{-}_{\eta,\alpha} f = \frac{z^{\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_z^{\infty} (t-z)^{\alpha-1} t^{-\eta-\alpha} f(t)\, dt, \tag{1.5}$$

$$I^{-}_{\eta,\alpha} f = \frac{z^{-\eta-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_z^{\infty} (t-z)^{\alpha-1} t^{\eta} f(t)\, dt, \tag{1.6}$$

$$K^{+}_{\eta,\alpha} f = \frac{z^{\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z-t)^{\alpha-1} t^{-\eta-\alpha} f(t)\, dt, \tag{1.7}$$

where $\operatorname{Re}\eta > -\frac{1}{2}$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$ and $f(t)$ belongs to the class $L_2(0, \infty)$.

2. The fundamental properties of $F(s)$ defined by (1.1) are expressed in the following two theorems:

Theorem 1. Let $1 \leq p \leq 2$ and let $f(x)$ belong to $L_p(0, \infty)$. Then the transform $F(x)$ as defined by (1.1) exists and

$$\left\{\int_0^{\infty} |F(x)|^{p'} dx\right\}^{1/p'} \leq A \left\{\int_0^{\infty} |f(x)|^{p} dx\right\}^{1/p} \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right).$$

When $p = 1$, the left hand term is to be replaced by the essential upper bound of $|F(x)|$ in $(0, \infty)$.

Proof. Since,

$$\left| e^{-\frac{1}{2}z} W_{k+\frac{1}{2},m}(z)\, z^{-k-\frac{1}{2}} \right| \leq e^{-\operatorname{Re}(z)}$$

we have,

$$|F(x)|_2 {}^{*}) \leq C \left(\int_0^N |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

where C is an absolute constant, and

$$|F(x)|_{\infty} = \operatorname*{ess.\,u.\,b.}_{0<x<\infty} |F(x)| \leq C \int_0^N |F(t)|\, dt.$$

Finally from the convexity theorem of M. Riesz [7] it follows that,

$$|F(x)|_{p'} \leq C \left(\int_0^N |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

which proves the theorem.

Theorem 2. Let $1 \leq p \leq 2$ and $f_j(t)$ $(j = 1, 2)$ belong to $L_p(0, \infty)$, and

$$F_j(s) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2},m}(st)\, (st)^{-k-\frac{1}{2}} f_j(t)\, dt \qquad (j = 1, 2)$$

---

*) $|F(x)|_p$ means $\left|\int_0^{\infty} |F(t)|^p dt\right|^{1/p}$.

then

$$\int_0^\infty f_1 F_2 \, dx = \int_0^\infty F_1 f_2 \, dx.$$

This is PARSEVAL's Theorem. The proof is quite elementary.

3. In the following section I shall give a theorem connection Meijer Transforms of different orders.

Theorem 3. Let l be a positive integer, $\mathrm{Re}\,(k \pm m) < \frac{1}{p'}$ and $2\,\mathrm{Re}\,(k) + l - 1 < \frac{1}{p}$ and let $f(t)$ belong to $L_p(0, \infty)$ $(1 \leq p \leq 2)$ and

(a) $$f(t) \overset{k+\frac{1}{2}}{\underset{m}{\longrightarrow}} F(x).$$

Let

(3.1) $$g(z) = I_{2k-1,l} f = \frac{z^{-2k+1-l}}{\Gamma(l)} \int_z^\infty (t-z)^{l-1} f(t)\, t^{2k-1} \, dt$$

and

$$G = I_{2k-1,l} F$$

then

$$G = -\int_0^\infty e^{-st/2} (st)^{-k-\frac{1}{2}} W_{k+\frac{1}{2},m}(st)\, g(t)\, dt + \\ + \left(\frac{1-4k}{s}\right) \int_0^\infty e^{-st/2} (st)^{-k+\frac{1}{2}} W_{k-\frac{1}{2},m}(st) \left(\frac{g(t)}{t}\right) dt.$$

(b)
$$F(s) = -\int_0^\infty e^{-st/2} (st)^{-k-\frac{1}{2}} W_{k+\frac{1}{2},m}(st)\, f(t)\, dt + \\ + \left(\frac{1-4k}{s}\right) \int_0^\infty e^{-st/2} (st)^{-k+\frac{1}{2}} W_{k-\frac{1}{2},m}(st) \left(\frac{f(t)}{t}\right) dt.$$

Let

(3.2) $$g(z) = K_{2k-1,l} f = \frac{z^{2k-1}}{\Gamma(l)} \int_z^\infty (z-t)^{l-1} f(t)\, t^{-2k+1-l} \, dt$$

and

$$G = K_{2k-1,l} F; \quad \text{then} \quad g(t) \overset{k+\frac{1}{2}}{\underset{m}{\longrightarrow}} G.$$

I shall prove these theorems for $l = 1$ only. The more general statement then immediately follows by repeated application of that particular case.

Proof of Theorem 3. (a) For $l = 1$, by theorem 1 $F(x) \in L_{p'}(0, \infty)$.

Also since $2\,\mathrm{Re}\,k < \frac{1}{p}$, $g(x)$ and $G(x)$ belong to $L_p(0, \infty)$ and $L_{p'}(0, \infty)$ respectively[1]).

Now we define

$$f_1(t) = 0, \quad \text{when} \quad 0 \leq t \leq s \quad \text{and} \quad f_1(t) = t^{2k-1} \quad \text{when} \quad t > s.$$

[1]) See Theorem 330 of HARDY, LITTLEWOOD; POLYA's Inequality (Cambridge 1934).

Plainly $f_1(t) \in L_p(0, \infty)$ over every $x > 0$ and

$$(3.3) \qquad \begin{cases} F_1(t) = \int_s^\infty e^{-\frac{1}{2}ut} (ut)^{-k-\frac{1}{2}} W_{k+\frac{1}{2},m}(ut)\, u^{2k-1}\, du \\ \qquad = t^{-2k} e^{-st/2} (st)^{k-\frac{1}{2}} W_{k-\frac{1}{2},m}(st). \end{cases}$$

The application of Theorem 2 to $f(t)$, $F(t)$ and $f_1(t)$, $F_1(t)$ gives

$$\int_s^\infty F(t)\, t^{2k-1}\, dt = \int_0^\infty t^{-2k} e^{-st/2} (st)^{k-\frac{1}{2}} W_{k-\frac{1}{2},m}(st)\, f(t)\, dt$$

i.e.,

$$\begin{aligned} G(s) &= s^{-2k} \int_s^\infty F(t)\, t^{2k-1}\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st/2} (st)^{-k-\frac{1}{2}} W_{k-\frac{1}{2},m}(st)\, f(t)\, dt \\ &= -\int_0^\infty e^{-st/2} (st)^{-k-\frac{1}{2}} W_{k-\frac{1}{2},m}(st)\, t^{-2k+1}\, d\left[t^{2k} g(t)\right]. \end{aligned}$$

Hence

$$G(s) = \operatorname*{Lim}_{N\to\infty} G(s, N),$$

where

$$(3.4) \qquad G(s, N) = -s^{-k-\frac{1}{2}} \int_0^N e^{-st/2} t^{-3k+\frac{1}{2}} W_{k-\frac{1}{2},m}(st)\, d\left[t^{2k} g(t)\right].$$

Now, integrating by parts, we have,

$$(3.5) \qquad \begin{cases} G(s, N) = -s^{-k-\frac{1}{2}} \left[e^{-st/2} t^{-3k+\frac{1}{2}} W_{k-\frac{1}{2},m}(st)\, t^{2k} g(t)\right]_0^N + \\ \qquad + s^{-k-\frac{1}{2}} \int_0^N \frac{d}{dt}\left[e^{-st/2} t^{-3k+\frac{1}{2}} W_{k-\frac{1}{2},m}(st)\right] t^{2k} g(t)\, dt \\ \qquad = G_1(s, N) + G_2(s, N). \end{cases}$$

We have for $t \to 0$,

$$e^{-st/2} t^{-k+\frac{1}{2}} W_{k-\frac{1}{2},m}(st) \sim A\, t^{1-k-m} + B\, t^{1-k+m}$$

where A and B are constants and from the asymptotic expansion of $W_{k,m}(t)$ for $t \to \infty$

$$e^{-st/2} t^{-k+\frac{1}{2}} W_{k-\frac{1}{2},m}(st) \sim e^{-st}\left\{1 + O(t^{-1})\right\}$$

where $|\arg(t)| < \pi$, $\operatorname{Re}(s) > 0$.

Also by applying HÖLDER's inequality to (2.1) for all values of t, we have,

$$|g(t)| \leqq t^{-2\operatorname{Re}(k)} \left\{\int_0^t |f(t)|^p\, dt\right\}^{1/p} \left\{\int_t^\infty u^{\{2\operatorname{Re}(k)-1\}p'}\, du\right\}^{1/p'} < A\, t^{-1/p} \qquad (p > 1)$$

$$|g(t)| \leqq t^{-2\operatorname{Re}(k)} \int_t^\infty |f(t)|\, t^{2\operatorname{Re}(k)-1}\, dt < t^{-1} \int_t^\infty |f(t)|\, dt \leqq A\, t^{-1} \qquad (p = 1)$$

where A does not depend on t. Hence the expression in the square brackets in $G_1(s, N)$ vanishes for $t=0$ where $\mathrm{Re}\,(k \pm m) < \frac{1}{p'}$ and $2\,\mathrm{Re}\,k < \frac{1}{p}$. Also

$$G_1(s, N) = e^{-sN}\{N^{-1/p} + O(N^{-1-1/p})\} \to 0 \tag{3.6}$$

as $N \to \infty$ under our hypothesis on p, k, m.

Again we have,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left[e^{-st/2}\, t^{-3k+\frac{1}{2}} W_{k-\frac{1}{2},m}(st)\right] \\ \qquad = -\, s^{-k+\frac{1}{2}} e^{-st/2} (st)^{k-\frac{1}{2}} t^{-4k}\left[W_{k+\frac{1}{2},m}(st) - (1-4k)\, W_{k-\frac{1}{2},m}(st)\right] \end{cases} \tag{3.7}$$

and hence

$$\begin{cases} G_2(s, N) = -\int_0^N e^{-st/2} (st)^{-k-\frac{1}{2}} W_{k+\frac{1}{2},m}(st)\, g(t)\, dt + \\ \qquad\qquad + \left(\frac{1-4k}{s}\right) \int_0^N e^{-st/2} (st)^{-k+\frac{1}{2}} W_{k-\frac{1}{2},m}(st) \left(\frac{g(t)}{t}\right) dt \end{cases} \tag{3.8}$$

and

$$G(s) = \lim_{N\to\infty} G_2(s, N) \qquad \text{by (3.5) and (3.6).}$$

Now $g(x) \in L_p$; therefore by Theorem 1 and (3.8) the limit in the mean of index p' of $G_2(s, N)$ exists and equals

$$-\int_0^\infty e^{-st/2} (st)^{-k-\frac{1}{2}} W_{k+\frac{1}{2},m}(st)\, g(t)\, dt + \\ + \left(\frac{1-4k}{s}\right) \int_0^\infty e^{-st/2} (st)^{-k+\frac{1}{2}} W_{k-\frac{1}{2},m}(st) \left(\frac{g(t)}{t}\right) dt.$$

This completes the proof.

The proof of 3 (b) is similar to that of Theorem 3 (a) except that the integration by parts has to be done the other way round, as it were.

Instead of function f_1 we have to use here,

$$f_2(t) = t^{-2k}, \qquad 0 \le t \le s; \qquad f_2(t) = 0, \qquad t > s.$$

Instead of (3.3) we obtain,

$$\begin{cases} F_2(t) = -\int_0^s e^{-ut/2} (ut)^{-k-\frac{1}{2}} \left[W_{k+\frac{1}{2},m}(ut) - (1-4k)\, W_{k-\frac{1}{2},m}(ut)\right] u^{-2k}\, du \\ \qquad = t^{-k-\frac{1}{2}} \int_0^s \frac{d}{dt}\left[e^{-ut/2} u^{-3k+\frac{1}{2}} W_{k-\frac{1}{2},m}(ut)\right] du \\ \qquad = t^{-k-\frac{1}{2}} e^{-st/2} s^{-3k+\frac{1}{2}} W_{k-\frac{1}{2},m}(st). \end{cases} \tag{3.9}$$

We then apply Theorem 2 to f, f_2, and F, F_2, writing in this case,

$$f(t) = t^{2k} \frac{d}{dt}\left[g(t)\, t^{-2k+1}\right] \tag{3.10}$$

and integrating by parts. In doing so, instead of (3.7) we have to use,

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-st/2}\,t^{k-\frac{1}{2}}\,W_{k-\frac{1}{2},m}(st)\right] = -\,e^{-st/2}\,t^{k-\frac{3}{2}}\,W_{k+\frac{1}{2},m}(st).$$

The rest of the proof follows closely that of Theorem 3 (a).

4. In this section I have applied the operators of fractional integration and differentiation to deduce some very interesting properties of Meijer Transform. The results have been given in the form of theorems. The rule for fractional differentiation is

$$\frac{d^{\nu}\omega^{\mu-1}}{d\omega^{\nu}} = \frac{\Gamma(\mu)\,\omega^{\mu-\nu-1}}{\Gamma(\mu-\nu)}.$$

Theorem 4. If

$$f(s) \xrightarrow[m]{k+\frac{1}{2}} F(t)$$

then

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial t^{2k}}\,f(t) \xrightarrow[m]{-k+\frac{1}{2}} s^{2k}F(s).$$

Proof. We begin with the inversion formula, (1.2) of (1.1) viz,

$$f(t) = \frac{\Gamma(1-k+m)}{2\pi i\,\Gamma(1+2m)}\int_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i} e^{st/2}\,M_{k-\frac{1}{2},m}(st)\,(st)^{k-\frac{1}{2}}F(s)\,ds$$

$$= \frac{\Gamma(1-k+m)}{2\pi i\,\Gamma(1+2m)}\int_{\beta+\infty i}^{\beta-\infty i}\left\{\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-k+m+1)_r}{r!\,(1+2m)_r}(st)^{k+m+r}\right\}F(s)\,ds.$$

Hence,

$$\frac{\partial^{\nu}f(t)}{\partial t^{\nu}} = \frac{\Gamma(1-k+m)}{2\pi i\,\Gamma(1+2m)}\,\frac{\partial^{\nu}}{\partial t^{\nu}}\left\{\int_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i}\left[\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-k+m+1)_r}{r!\,(1+2m)_r}(st)^{k+m+r}\right]F(s)\,ds\right\}.$$

As the change of integration and summation is easily justified, we can differentiate term by term under the sign of integration and hence we get after summation

$$(4.1)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial^{\nu}f(t)}{\partial t^{\nu}} = {}& \frac{\Gamma(1-k+m)}{2\pi i\,\Gamma(1+2m)}\,\frac{\Gamma(1+k+m)}{\Gamma(k+m+1-\nu)}\,t^{-\nu}\times\\ & \times\int_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i}(st)^{k+m}\,{}_2F_2\left[\begin{matrix}1-k+m,\ 1+k+m;\\ 1+2m,\ k+m+1-\nu;\end{matrix}\ st\right]F(s)\,ds.\end{aligned}\right.$$

Taking $\nu = 2k$ we get,

$$\frac{\partial^{2k}f(t)}{\partial t^{2k}} = \frac{\Gamma(1+k+m)}{2\pi i\,\Gamma(1+2m)}\,t^{2k}\int_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i}(st)^{k+m}\,{}_1F_1[k+m+1;\,1+2m;\,st]\,F(s)\,ds$$

$$= \frac{\Gamma(1+k+m)}{2\pi i\,\Gamma(1+2m)}\int_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i}e^{st/2}\,(st)^{-k-\frac{1}{2}}\,M_{-k-\frac{1}{2},m}(st)\left\{s^{2k}F(s)\right\}ds.$$

Hence on inverting, we get

$$s^{2k}F(s)=\int_0^\infty e^{-st/2}(st)^{k-\frac{1}{2}}W_{-k+\frac{1}{2},m}(st)\left\{\frac{\partial^{2k}}{\partial t^{2k}}f(t)\right\}dt \tag{4.2}$$

and hence the result.

Theorem 5. If

$$f(s)\xrightarrow[m]{k+\frac{1}{2}}F(t)$$

then

$$s^{\alpha+k-m}I^{\alpha}\left\{s^{m-k}f(s)\right\}\xrightarrow[m+\frac{\alpha}{2}]{k+\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}}F(t),$$

where $I^{\alpha}f$ is the Riemann-Liouville integral of order α.

Proof. We begin with the inversion formula, i.e., (1.2)

$$f(t)=\frac{\Gamma(1-k+m)}{2\pi i\,\Gamma(1+2m)}\int_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i}e^{\frac{1}{2}ts}M_{k-\frac{1}{2},m}(st)\,(st)^{k-\frac{1}{2}}F(s)\,ds.$$

Hence

$$\begin{aligned}I^{\alpha}s^{\lambda}f(s)&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s(s-u)^{\alpha-1}f(u)\,u^{\lambda}\,du\\&=\frac{\Gamma(1-k+m)}{\Gamma(1+2m)\,\Gamma(\alpha)\,2\pi i}\int_0^s(s-u)^{\alpha-1}u^{\lambda}\,du\int_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i}e^{\frac{1}{2}tu}M_{k-\frac{1}{2},m}(ut)\,(ut)^{k-\frac{1}{2}}F(t)\,dt.\end{aligned}$$

Changing the order of integration, which is justified by absolute convergence, and integrating term by term, we get

$$\left\{\begin{aligned}I^{\alpha}s^{\lambda}f(s)=&\frac{\Gamma(1-k+m)\,\Gamma(k+m+\lambda+1)\,s^{\lambda+k+m+\alpha}}{\Gamma(1+2m)\,\Gamma(k+m+\lambda+\alpha+1)\,2\pi i}\times\\&\times\int_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i}t^{k+m}\,{}_2F_2\left[\begin{matrix}1-k+m,\ k+m+\lambda+1;\\1+2m,\ k+m+\lambda+\alpha+1;\end{matrix}\ st\right]F(t)\,dt.\end{aligned}\right. \tag{4.3}$$

Taking $\lambda=m-k$, we get,

$$I^{\alpha}s^{m-k}f(s)=\frac{\Gamma(1-k+m)}{2\pi i\,\Gamma(1+\alpha+2m)}\int_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i}t^{k+m}\,{}_1F_1[1-k+m;\alpha+1+2m;st]\,F(t)\,dt.$$

Hence

$$\left\{\begin{aligned}s^{\alpha+k-m}I^{\alpha}s^{m-k}f(s)=&\frac{\Gamma(1-k+m)}{2\pi i\,\Gamma(1+\alpha+2m)}\times\\&\times\int_{\beta+\infty i}^{\beta-\infty i}e^{st/2}(st)^{k+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}M_{k+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2},m+\frac{\alpha}{2}}(st)\,F(t)\,dt.\end{aligned}\right. \tag{4.4}$$

Hence on inverting, we get,

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\, m+\frac{\alpha}{2}}(st)\,(st)^{-k-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}} \left\{ s^{\alpha+k-m} I^{\alpha}[s^{m-k} f(s)] \right\} ds,$$

which completes the proof.

Theorem 6. If

$$f(s) \xrightarrow[m]{k+\frac{1}{2}} F(t)$$

then

$$z^{\alpha} I^{+}_{m-k,\alpha} f(z) \xrightarrow[m+\frac{\alpha}{2}]{k+\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}} s^{-\alpha} F(s).$$

Proof. Again starting with the inversion formula

$$f(t) = \frac{\Gamma(1-k+m)}{2\pi i\, \Gamma(1+2m)} \int_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i} e^{\frac{1}{2}ts} M_{k-\frac{1}{2},m}(st)\,(st)^{k-\frac{1}{2}} F(s)\, ds,$$

we have

$$\begin{aligned} I^{+}_{\eta,\alpha} f(z) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} z^{-\eta-\alpha} \int_0^z (z-t)^{\alpha-1} t^{\eta} f(t)\, dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} z^{-\eta-\alpha} \int_0^z (z-t)^{\alpha-1} t^{\eta}\, dt\, \frac{\Gamma(1-k+m)}{2\pi i\, \Gamma(1+2m)} \times \\ &\qquad \times \int_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i} e^{\frac{1}{2}ts} M_{k-\frac{1}{2},m}(st)\,(st)^{k-\frac{1}{2}} F(s)\, ds. \end{aligned}$$

Changing the order of integration and summation and integrating term by term, we get,

$$(4.5) \quad \begin{cases} I^{+}_{\eta,\alpha} f(z) = \dfrac{\Gamma(1-k+m)\,\Gamma(k+m+\eta+1)}{2\pi i\, \Gamma(1+2m)\,\Gamma(\alpha+k+m+\eta+1)} z^{k+m} \times \\ \qquad \times \displaystyle\int_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i} s^{k+m}\, {}_2F_2\left[\begin{matrix} -k+m+1,\, k+m+\eta+1; \\ 1+2m,\, k+m+\eta+\alpha+1; \end{matrix} sz \right] F(s)\, ds. \end{cases}$$

Putting $\eta = m-k$, we get,

$$(4.6) \quad \begin{cases} I^{+}_{m-k,\alpha} f(z) = \dfrac{\Gamma(1-k+m)}{2\pi i\, \Gamma(1+2m+\alpha)} \times \\ \qquad \times \displaystyle\int_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i} e^{\frac{1}{2}sz} (sz)^{k+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}} M_{k+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2},\, m+\frac{\alpha}{2}}(sz) \left\{ (zs)^{-\alpha} F(s) \right\} ds \end{cases}$$

Hence on inverting,

$$(4.7) \quad s^{-\alpha} F(s) = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}sz} W_{k+\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\, m+\frac{\alpha}{2}}(sz)\,(sz)^{-k-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}} \left\{ z^{\alpha} I^{+}_{m-k,\alpha} f(z) \right\} dz$$

which proves the theorem.

Similarly,

Theorem 7. If

$$f(s) \xrightarrow[m]{k-\frac{1}{2}} F(t)$$

then

$$s^{\alpha} K^{+}_{k-m-\alpha,\alpha} f(s) \xrightarrow[m+\frac{\alpha}{2}]{k+\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}} z^{-\alpha} F(z).$$

I am grateful to Dr. R. P. AGARWAL for the ungrudging help that he has given in the preparation of this paper.

References

[1] ERDÉLYI, A.: Quart. J. Math. (Oxford) **11**, 293—303 (1940). — [2] ERDÉLYI and KOBER: Quart. J. Math. (Oxford) **11**, 212—221 (1940). — [3] KOBER, H.: Quart. J. Math. (Oxford) **11**, 193—211 (1940). — [4] KOBER, H.: Trans. Amer. Math. Soc. **50**, 160—174 (1941). — [5] MEIJER, C. S.: Proc. Amsterdam Akad. Wet. **43**, 599—608, 702—711 (1940). — [6] MEIJER, C. S.: Proc. Amsterdam Akad. Wet. **44**, 727—737, 831—839 (1940). — [7] RIESZ, M.: Acta Math. **49**, 465—497 (1927). — [8] SAKSENA, K. M.: Proc. Nat. Acad. Sci. (India) A **21**, 201—208 (1952). — [9] SAKSENA, K. M.: Proc. Nat. Inst. Sci. (India) **19**, 173—181 (1953). — [10] VARMA, R. S.: Proc. Nat. Acad. Sci. (India) A **20**, 209—216 (1951).

Department of Mathematics and Statistics, The University, Lucknow (India)

(Eingegangen am 4. August 1956)

Endler, O.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 413—427 (1957)

Differentiation in algebraischen Funktionenkörpern von n Variablen [1])

Von
Otto Endler

Die Arbeit will feststellen, wie weit die elementare Theorie der Differentiation sich auf die Untersuchung der maximaldimensionalen *(maxdim.)* Bewertungen eines algebraischen Funktionenkörpers von n Variablen *(a.F.nV.)* mit Erfolg anwenden läßt. Die von E. Kähler[2]) mit tieferliegenden Hilfsmitteln durchgeführten allgemeineren Untersuchungen sind bewußt unberücksichtigt geblieben.

Die Übertragung einer Reihe von Begriffen und Sätzen aus der Theorie der a.F.1V.[3]) wird dadurch ermöglicht, daß jede maxdim. Bewertung B eines a.F.nV. $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ für einen geeignet konstruierten Zwischenkörper $\mathfrak{l}$ als Bewertung des a.F.1V. $\mathfrak{K}|\mathfrak{l}$ aufgefaßt werden kann (§ 2). Für die Konstruktion von $\mathfrak{l}$ sind insbesondere solche algebraisch-unabhängige *(alg.-unabh.)* n-Tupel $\mathfrak{x}=\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ aus $\mathfrak{B}$ von Bedeutung, aus deren Restklassen ein in $\Lambda|\mathsf{K}$ alg.-unabh. bzw. separierendes $(n-1)$-Tupel gewählt werden kann ($\mathfrak{B}$ bzw. Λ bezeichnet den zu B gehörigen Bewertungsring bzw. Restklassenkörper); n-Tupel dieser Art werden B-zulässig bzw. B-regulär genannt. B-zulässige $\mathfrak{x}$ sind dadurch ausgezeichnet, daß B über einer Polynombewertung von $\mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ liegt.

Der Zusammenhang zwischen den maxdim. Bewertungen und den Differentiationen von $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ wird hergestellt durch den (in Verallgemeinerung der „uniformisierenden Variablen" gebildeten) Begriff des uniformisierenden n-Tupels (§ 3): ein in $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ separierendes $\mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{B}$ heißt B-uniformisierend, wenn $D^i_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{B}$ $(1\leq i\leq n)$ ist ($D^1_{\mathfrak{x}}, \ldots, D^n_{\mathfrak{x}}$ bezeichnen die partiellen Differentiationen nach $\mathfrak{x}$). $\mathfrak{y}$ aus $\mathfrak{B}$ ist genau dann ebenfalls B-uniformisierend, wenn die Funktionaldeterminante $|D^i_{\mathfrak{x}} y_j|_{1\ldots n}$ eine Einheit in $\mathfrak{B}$ ist. Es wird die Existenz B-uniformisierender n-Tupel bewiesen, sowie der für das Folgende grundlegende Satz: „Ist $\Lambda|\mathsf{K}$ separabelerzeugbar, so ist $\mathfrak{x}$ genau dann B-uniformisierend, wenn $\mathfrak{x}$ B-regulär und B unverzweigt bezüglich $\mathsf{K}(x_1, \ldots, x_n)$ ist."

Als erste Anwendung dieses Satzes wird in § 4 der Begriff „uniformisierend" auf gestufte Bewertungen $\boldsymbol{B}=\langle B^{\langle 1\rangle}, \ldots, B^{\langle n\rangle}\rangle$ eines a.F.nV. $\mathfrak{K}^{\langle n\rangle}|\mathsf{K}$ übertragen ($B^{\langle i\rangle}$ maxdim. Bewertung von $\mathfrak{K}^{\langle i\rangle}|K$, $\mathfrak{K}^{\langle i-1\rangle}=\Lambda^{\langle i\rangle}$), und es wird

[1]) Umgearbeitete Fassung meiner Dissertation (Bonn 1955).

[2]) Kähler, E.: Algebra und Differentialrechnung, Ber. Math. Tagung Berlin 1953, S. 58—163.

[3]) Vgl. C. Chevalley: Introduction to the Theory of Algebraic Functions of one Variable. Math. Surveys VI. New York 1951. Zitiert mit „Ch.".

insbesondere gezeigt, wie er mit den Differentiationen in den durch $\boldsymbol{B}$ definierten allgemeinen Bewertungsringen $\mathfrak{C}_1 \subset \mathfrak{C}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{C}_n = \mathfrak{V}^{\langle n \rangle}$ zusammenhängt.

In § 5 (der nur §§ 1—3 voraussetzt) werden auf die (alternierenden) Differentiale n-ten Grades eines separabelerzeugbaren a.F.nV. $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ dessen maxdim. Bewertungen so übertragen, daß im Falle $n=1$ Übereinstimmung mit CH. besteht; hierzu braucht man, wie ein Beispiel zeigt, eine Verallgemeinerung der Differente auf transzendente Erweiterungen. Anschließend wird der für $n=1$ bekannte Zusammenhang zwischen Differential und Differente (Riemannsche Formel): $B(dx) = \mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}(x)} B$ ($x \in \mathfrak{V}$, separierend) auf separierende B-zulässige n-Tupel $\mathfrak{x}$ verallgemeinert, allerdings nur als eine Ungleichung, in der das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn $\mathfrak{x}$ „B-semiregulär" ist (dies trifft stets zu für $n=1$, und für beliebiges n im Falle der Charakteristik 0). Ein Beispiel eines separierenden B-zulässigen, aber nicht B-semiregulären n-Tupels zeigt, daß die hier entwickelten Hilfsmittel nicht ausreichen, eine befriedigende Verallgemeinerung der Riemannschen Formel auf a.F.nV. zu gewinnen[4]).

Schließlich werden in § 6 die Ergebnisse von §§ 2—3 zur Untersuchung der projektiven Bewertungssysteme[5]) verwendet. Insbesondere wird gezeigt, daß bei vollkommenem Koeffizientenkörper K zwei beliebige (zu separierenden n-Tupeln gehörige) projektive Bewertungssysteme sich höchstens um endlich viele Bewertungen unterscheiden.

§ 1. Bezeichnungen

Die Buchstaben K, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{K}$, λ, Λ, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{L}$ bezeichnen stets (kommutative) Körper; $Ch(\mathsf{K})$ = Charakteristik von K, $\mathsf{K}' = \mathsf{K} - \{0\}$, $\mathsf{K}_{\mathfrak{K}} = \{a \in \mathfrak{K} \mid a$ algebraisch über $\mathsf{K}\}$ ($\mathsf{K} \subseteq \mathfrak{K}$), $\mathsf{K}(\mathfrak{x}) = \mathsf{K}(x_1, \ldots, x_n)$. Eine endlicherzeugbare Körpererweiterung $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ vom Transzendenzgrad *(Trgr.)* $n>0$ heißt ein *a.F.nV.* mit dem Koeffizientenkörper K und Konstantenkörper $\mathsf{K}_{\mathfrak{K}}$; ist K vollkommen, so ist $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ separabelerzeugbar.

Die Ableitung eines Polynoms $F = F(X_1, \ldots, X_n)$ nach X_j wird mit $F^{(j)}$ bezeichnet; es ist $F^{(j)} \neq 0$, genau wenn F separabel (j) (d.h. separabel in X_j) ist.

Ein n-Tupel $\mathfrak{x} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ aus $\mathfrak{K}$ heißt *minimalabhängig* (bezüglich K), wenn $\mathfrak{x}$ alg.-abh., aber für ein j $\mathfrak{x}^{(j)} = \langle x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n \rangle$ alg.-unabh. bezüglich K ist; insbesondere heißt dann $\mathfrak{x}$ *algebraisch* (j) und, falls x_j sogar separabel über $\mathsf{K}(\mathfrak{x}^{(j)})$ ist, *separabel* (j). Zu $\mathfrak{x}$ gehört ein (bis auf einen Faktor $\in \mathsf{K}'$ eindeutig bestimmtes) irreduzibles Polynom $P = P(X_1, \ldots, X_n)$ über K mit $P(\mathfrak{x}) = 0$. Jedes Polynom F über K mit $F(\mathfrak{x}) = 0$ ist durch P teilbar; $\mathfrak{x}$ ist separabel (j) bzw. algebraisch (j), genau wenn P in X_j separabel ist bzw. einen Grad $f_j > 0$ besitzt (dann ist $f_j = [\mathsf{K}(\mathfrak{x}) : \mathsf{K}(\mathfrak{x}^{(j)})]$). Ist K vollkommen, so ist jedes minimalabhängige $\mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{K}$ separabel (j) für ein j.

[4]) Inzwischen hat F. K. SCHMIDT die Riemannsche Formel für a.F.nV. in voller Allgemeinheit bewiesen (noch unveröffentlicht).

[5]) Vgl. W. KRULL: Über geschlossene Bewertungssysteme. J. f. Math. **190**, 75—92 (1952). Zitiert mit KR.

Abbildungen D von $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{L} \supseteq \mathfrak{K}$, für die $D(a_1 + a_2) = Da_1 + Da_2$ und $D(a_1 \cdot a_2) = a_1 \cdot Da_2 + a_2 \cdot Da_1$ $(a_1, a_2 \in \mathfrak{K})$ gilt, heißen *Differentiationen von* $\mathfrak{K}$ *in* $\mathfrak{L}$, insbesondere *von* $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ *in* $\mathfrak{L}$, wenn $D\mathsf{K} = \{0\}$ ist. Ihre Gesamtheit bildet ersichtlich einen $\mathfrak{L}$-Modul $\boldsymbol{D}_{\mathfrak{K},\mathfrak{L}}$ bzw. $\boldsymbol{D}_{\mathfrak{K}\mathsf{K},\mathfrak{L}}$: $(c_1 \cdot D_1 + c_2 \cdot D_2)a = c_1 \cdot D_1 a + c_2 \cdot D_2 a$ $(a \in \mathfrak{K};\ c_1, c_2 \in \mathfrak{L})$. Ist $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ endlicherzeugbar vom Trgr. $n \geqq 0$, $\mathfrak{x}$ separierend in $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ und $\mathfrak{L} \supseteq \mathfrak{K}$, so läßt sich jede Differentiation $\Delta \in \boldsymbol{D}_{\mathsf{K},\mathfrak{L}}$ auf genau eine Weise zu einer Differentiation $D \in \boldsymbol{D}_{\mathfrak{K},\mathfrak{L}}$ so fortsetzen, daß $Dx_i = y_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ für vorgegebenes $\mathfrak{y}$ aus $\mathfrak{L}$ ist[6]). Die durch $D^j_{\mathfrak{x}} x_i = \delta_{ij}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ definierte Differentiation $D^j_{\mathfrak{x}} \in \boldsymbol{D}_{\mathfrak{K}\mathsf{K},\mathfrak{K}}$ heißt die *Differentiation* (j) *nach* $\mathfrak{x}$ *von* $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$; sie ist sogar $\in \boldsymbol{D}_{\mathfrak{K}\mathsf{K}(\mathfrak{x}^{(p)}),\mathfrak{K}}$. Jedes $D \in \boldsymbol{D}_{\mathfrak{K}\mathsf{K},\mathfrak{L}}$ läßt sich als Summe $D = \sum_1^n Dx_j \cdot D^j_{\mathfrak{x}}$ darstellen, $\langle D^1_{\mathfrak{x}}, \ldots, D^n_{\mathfrak{x}} \rangle$ ist also eine Basis von $\boldsymbol{D}_{\mathfrak{K}\mathsf{K},\mathfrak{L}}$. Man zeigt leicht: Ein n-Tupel $\mathfrak{y}$ aus $\mathfrak{K}$ ist genau dann ebenfalls separierend in $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$, wenn die Funktionaldeterminante $D_{\mathfrak{x}}\mathfrak{y} = |D^i_{\mathfrak{x}} y_i|_{1\ldots n} \neq 0$ ist.

Wir betrachten nur diskrete normierte *Bewertungen* B von $\mathfrak{K}$[7]), d.h. Abbildungen von $\mathfrak{K}^\cdot$ *auf* die Menge aller ganzen Zahlen mit $B(a_1 \cdot a_2) = B(a_1) + B(a_2)$ und $B(a_1 + a_2) \geqq \min\{B(a_1), B(a_2)\}$ $(a_1, a_2 \in \mathfrak{K})$, und wir setzen $B(0) = \infty$. $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{M}$, Λ, $\mathfrak{K}^*$, B^*, Φ bezeichnen den zugehörigen Bewertungsring bzw. das Bewertungsideal von $\mathfrak{B}$ bzw. den Restklassenkörper $\mathfrak{B}/\mathfrak{M}$ bzw. die B-perfekte Hülle von $\mathfrak{K}$ bzw. die Fortsetzung von B auf $\mathfrak{K}^*$ bzw. die Restklassenbildung mod $\mathfrak{M}$ (und mod $\mathfrak{M}^*$; Λ und Λ^* werden wie üblich identifiziert). Es sei $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{K}$; ist $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{B}$, so ist B eine Bewertung von $\mathfrak{K}|\mathfrak{k}$ (d.h. $B(\mathfrak{k}^\cdot) = \{0\}$), anderenfalls liegt B über der Bewertung b von $\mathfrak{k}$ mit dem Bewertungsring $\mathfrak{b} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{k}$. Im ersteren Falle wird $\mathfrak{k}$ durch Φ isomorph in Λ abgebildet (falls $\mathfrak{k} = \mathsf{K}$ als Koeffizientenkörper angesehen wird, identifiziert man $\Phi\mathsf{K}$ mit K), im letzteren Falle wird λ (wegen $\mathfrak{m} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{k}$) in Λ eingebettet $(\varphi a = \Phi a\ (a \in \mathfrak{b}))$. Der letztgenannte Fall trifft stets zu, wenn $\mathfrak{K}|\mathfrak{k}$ endlich-algebraisch ist; dann liegen über jeder Bewertung b von $\mathfrak{k}$ nur endlich viele Bewertungen $B = B^{(1)}, \ldots, B^{(r)}$ $(r > 0)$. $e = e_{\mathfrak{K}\mathfrak{k}} = B(a) \cdot (b(a))^{-1}$ $(a \in \mathfrak{k}^\cdot)$ bzw. $g = g_{\mathfrak{K}\mathfrak{k}} = [\Lambda : \lambda]$ $(< \infty)$ bezeichnet den *Verzweigungsindex* bzw. *Relativgrad von* B *bezüglich* $\mathfrak{k}$; ist $e = 1$, so heißt B *unverzweigt bezüglich* $\mathfrak{k}$, ist $\Lambda|\lambda$ separabel, so heißt B *separabel bezüglich* $\mathfrak{k}$.

Eine Bewertung B des a.F.nV. $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ heißt *maxdim.* bezüglich K, wenn $\Lambda|\mathsf{K}$ den höchstmöglichen Trgr. $n-1$ besitzt.

Ein Bewertungssystem $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{K}$ heißt *streng unabhängig*, wenn zu jedem endlichen Tupel $\langle B_1, \ldots, B_s \rangle$ paarweise verschiedener Bewertungen $\in \mathfrak{S}$, jedem s-Tupel $\langle n_1, \ldots, n_s \rangle$ ganzer Zahlen und jedem $\langle y_1, \ldots, y_s \rangle$ aus $\mathfrak{K}$ ein $y \in \mathfrak{K}$ existiert, so daß $B_i(y - y_i) = n_i$ $(1 \leqq i \leqq s)$ und $B(y) \geqq 0$ $(B \in \mathfrak{S} - \{B_1, \ldots, B_s\})$ ist. Gilt dies wenigstens für $y_1 = \cdots = y_s = 0$, so heißt $\mathfrak{S}$ *unabhängig*.

Jedes endliche Bewertungssystem ist bekanntlich streng unabhängig.

---

[6]) Vgl. N. Bourbaki: Algèbre, Paris 1950, V § 9 N° 1 Prop. 4—5; für $n = 0$ ist „$\mathfrak{x}$ separierend" zu ersetzen durch „$\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ separabel".

[7]) Nur in § 4 werden außerdem „gestufte Bewertungen" behandelt.

§ 2. B-zulässige und B-reguläre n-Tupel

Ist B eine Bewertung des a.F.nV. $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$, $\mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{V}$ eine Transzendenzbasis *(Tr.-B.)* von $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$, so ist $\mathfrak{p}=\mathfrak{M}\cap\mathsf{K}[\mathfrak{x}]$ ein Primideal in $\mathsf{K}[\mathfrak{x}]$ $((0)\subset\mathfrak{p}\subset\mathsf{K}[\mathfrak{x}])$, und der Quotientenring $\mathsf{K}[\mathfrak{x}]_\mathfrak{p}$ ist in dem Bewertungsring $\mathfrak{b}$ der unter B liegenden Bewertung b von $\mathsf{K}(\mathfrak{x})$ enthalten. Insbesondere ist $\mathsf{K}[\mathfrak{x}]_\mathfrak{p}=\mathfrak{b}$, genau wenn $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal (also Primhauptideal) von $\mathsf{K}[\mathfrak{x}]$ ist, und dies trifft genau dann zu, wenn $\Phi\mathfrak{x}=\langle\Phi x_1,\ldots,\Phi x_n\rangle$ minimalabhängig ist. Wir nennen $\mathfrak{x}$ in diesem Falle *B-zulässig*; insbesondere *B-zulässig* (j) bzw. *B-regulär* (j), wenn $\Phi\mathfrak{x}$ algebraisch (j) bzw. $\Phi\mathfrak{x}^{(j)}$ separierend in $\Lambda|\mathsf{K}$ ist.

Eine notwendige Bedingung für die Existenz B-zulässiger bzw. B-regulärer n-Tupel ist ersichtlich, daß B maxdim. ist bzw. außerdem $\Lambda|\mathsf{K}$ separabelerzeugbar ist. Daß diese Bedingung auch hinreicht, folgt aus:

(2.1) a) *Zu je endlich vielen maxdim. Bewertungen $B_1,\ldots,B_s$ des a.F.nV. $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ existiert ein n-Tupel $\mathfrak{z}$ aus $\mathfrak{V}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{V}_s$ derart, daß $B_i(z_1)=1$ und $\Phi_i\mathfrak{z}^{(1)}$ eine [falls $\Lambda_i|\mathsf{K}$ separabelerzeugbar ist, separierende] Tr.-B. von $\Lambda_i|\mathsf{K}$ ist $(1\leqq i\leqq s)$. Jedes solche $\mathfrak{z}$ ist B_i-zulässig (1) [bzw. sogar B_i-regulär (1)], und B_i ist unverzweigt bezüglich $\mathsf{K}(\mathfrak{z})$ $(1\leqq i\leqq s)$.*

b) *Ist $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ separabelerzeugbar, so existiert ein separierendes $\mathfrak{z}$ dieser Art.*

Beweis. a) Es sei $\langle\zeta_{i2},\ldots,\zeta_{in}\rangle$ eine (gegebenenfalls separierende) Tr.-B. von $\Lambda_i|\mathsf{K}$ $(1\leqq i\leqq s)$. Wegen der strengen Unabhängigkeit von $\{B_1,\ldots,B_s\}$ gibt es ein $\mathfrak{z}$ aus $\mathfrak{V}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{V}_s$ mit $B_i(z_1)=1$ und $\Phi_i z_j=\zeta_{ij}$ $(1\leqq i\leqq s,\ 2\leqq j\leqq n)$. $\mathfrak{z}^{(1)}$ ist alg.-unabh. und B_i eine Bewertung von $\mathfrak{K}|\mathsf{K}(\mathfrak{z}^{(1)})$; wegen $B_i(z_1)>0$ ist z_1 transzendent über $\mathsf{K}(\mathfrak{z}^{(1)})$, also $\mathfrak{z}$ eine Tr.-B. von $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$. Der Rest ist trivial.

b) Wir zeigen zunächst: Es gibt ein separierendes $\mathfrak{v}$ mit $B_i(\mathfrak{v})=\min\{B_i(y_1),\ldots,B_i(y_n)\}>1$ $(1\leqq i\leqq s)$. Beweis durch Induktion: Es sei $\mathfrak{u}$ separierend, $B_i(\mathfrak{u})>1$ $(1\leqq i<m)$. Dann ist $\mathfrak{v}$, definiert durch $v_i=u_i$ bzw. $u_i\cdot(u_i-1)^{-1}$ für $B_m(u_i)=$ bzw. $\neq 0$, ebenfalls separierend, und $B_i(\mathfrak{v})>1$ $(1\leqq i<m)$, $B_m(\mathfrak{v})\geqq 0$. Für ein irreduzibles P ist $B_m(P(\mathfrak{v}))>0$; $\mathfrak{w}=\langle P(\mathfrak{v})\cdot v_1, v_2,\ldots,v_n\rangle$ ist wegen $D_\mathfrak{v}\mathfrak{w}=P(\mathfrak{v})+v_1\cdot P^{(1)}(\mathfrak{v})\neq 0$ separierend, ebenso $\mathfrak{x}=w_1^k\cdot\mathfrak{w}$ (für geeignetes $k>1$), und es ist $B_i(\mathfrak{x})>1$ $(1\leqq i\leqq m)$.

Es sei $\mathfrak{z}$ gemäß a) konstruiert; dann ist die Determinante $|D_\mathfrak{v}^i z_j+X_{ij}|_{1\ldots n}$ ein Polynom in den Unbestimmten X_{ij}, in jeder vom Grade 1, also ist für eine Matrix $\langle\alpha_{ij}\rangle_{1\ldots n}$ aus K $|D_\mathfrak{v}^i z_j+\alpha_{ij}|_{1\ldots n}\neq 0$, also ist $\left\langle z_1+\sum_1^n{}_i\,\alpha_{i1}\cdot y_i,\ldots,\right.$ $\left.z_n+\sum_1^n{}_i\,\alpha_{in}\cdot y_i\right\rangle$ separierend und hat die gewünschte Eigenschaft.

Im folgenden sei B bzw. b stets eine maxdim. Bewertung des a.F.nV. $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ bzw. $\mathfrak{k}|\mathsf{K}$. Es sei $\mathfrak{x}$ eine Tr.-B. von $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$; die Bewertungen B, für die $\mathfrak{x}$ B-zulässig bzw. B-regulär ist, lassen sich leicht übersehen:

(2.2) *Eine Tr.-B. $\mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{V}$ ist B-zulässig und P das zu $\Phi\mathfrak{x}$ gehörige Polynom, genau wenn B über der durch $b_{\mathfrak{x},P}(P(\mathfrak{x}))=1$, $b_{\mathfrak{x},P}(Q(\mathfrak{x}))=0$ (Q teilerfremd zu P) definierten Polynombewertung $b_{\mathfrak{x},P}$ von $\mathsf{K}(\mathfrak{x})|\mathsf{K}$ liegt. In diesem Falle ist $\lambda_{\mathfrak{x},P}=\mathsf{K}(\Phi\mathfrak{x})$, $\Lambda|\mathsf{K}$ endlicherzeugbar.*

Insbesondere ist $\mathfrak{x}$ *B-regulär* (j), *genau wenn* $\Phi\mathfrak{x}$ *separabel* (j) *und B separabel bezüglich* $\mathsf{K}(\mathfrak{x})$ *ist.*

Hieraus folgt unmittelbar:

(2.3) *Ist* $\mathfrak{z}$ *B-zulässig* (j) [*bzw. B-regulär* (j)], *so ist für* $\mathfrak{l}=\mathsf{K}(\mathfrak{z}^{(j)})$ *B eine Bewertung des a.F.1V.* $\mathfrak{R}|\mathfrak{l}$ [*bzw. außerdem* $\Lambda|\Phi\mathfrak{l}$ *separabel*].

(2.3) in Verbindung mit (2.1) ermöglicht die Übertragung einer Reihe von Sätzen aus der Theorie der a.F.1V. auf a.F.nV. Wir erwähnen hier nur:

(2.4) *Ist* $\mathfrak{R}|\mathfrak{k}$ *endlich-algebraisch,* $[\mathfrak{R}:\mathfrak{k}]=k$, *so gilt*:

a) $\mathfrak{B}^{(1)}\cap\ldots\cap\mathfrak{B}^{(r)}$ *ist gleich dem Ring* $\mathfrak{J}$ *aller von* $\mathfrak{b}$ *ganzabhängigen Elemente* $\in\mathfrak{R}$.

b) $e^{(1)}\cdot g^{(1)}+\cdots+e^{(r)}\cdot g^{(r)}=k$.

c) *Zu jeder Basis* $\langle v_1,\ldots,v_k\rangle$ *von* $\mathfrak{R}|\mathfrak{k}$ *existiert ein* $s\geqq 0$ *derart, daß aus* $\sum_1^k a_i\cdot v_i\in\mathfrak{J}$ $(a_i\in\mathfrak{k})$ *folgt:* $b(a_i)\geqq -s$ $(1\leqq i\leqq k)$.

d) *Es gibt eine b-Ganzheitsbasis* $\langle w_1,\ldots,w_k\rangle$ *von* $\mathfrak{R}|\mathfrak{k}$ (*d.h.* $\mathfrak{J}=\mathfrak{b}\cdot w_1+\cdots+\mathfrak{b}\cdot w_k$).

e) *Ist* $\mathfrak{R}|\mathfrak{k}$ *normal, so ist* $\mathfrak{B}^{(i)}=\Theta_i\mathfrak{B}^{(1)}$ *für einen Automorphismus* Θ_i *von* $\mathfrak{R}|\mathfrak{k}$ $(1\leqq i\leqq r)$; *ferner ist* $e^{(i)}=e$, $g^{(i)}=g$ $(1\leqq i\leqq r)$ *also* $r\cdot g\cdot e=k$.

Beweis. Vgl. Ch. IV § 1 Theorem 1, § 2 Th. 2, § 3 Lemma 2, Th. 3 und Lemma 4.

(2.5) *Ist* $\mathfrak{z}$ *B-regulär* (j), $\mathfrak{l}=\mathsf{K}(\mathfrak{z}^{(j)})$, *so gilt*:

a) *Es existiert genau ein Repräsentantenkörper* $\mathfrak{L}^*$ *von* Λ *mit* $\mathfrak{l}_{\mathfrak{R}}\subseteqq\mathfrak{L}^*\subseteqq\mathfrak{R}^*$.

Ist $B(u)=1$, *so läßt sich jedes* $a\in\mathfrak{R}^*$ *eindeutig als Potenzreihe* $a=\sum_{-\infty}^{\infty}{}_i\, c_i\cdot u^i$ [$c_i\in\mathfrak{L}$, $c_j=0$ *bzw.* $\neq 0$ *für* $j<$ *bzw.* $=B(a)$] *darstellen.*

b) *Jede Differentiation* D *von* $\mathfrak{R}$ *mit* $D\mathfrak{l}_{\mathfrak{R}}\subseteqq\mathfrak{l}_{\mathfrak{R}}$ *läßt sich auf genau eine Weise zu einer stetigen*[8]) *Differentiation* D^* *von* $\mathfrak{R}^*$ *fortsetzen; es ist* $D^*\mathfrak{L}^*\subseteqq\mathfrak{L}^*$ *und*

$$D^*a=\sum_{-\infty}^{\infty}{}_i(D^*c_i)\cdot u^i+Du\cdot\sum_{-\infty}^{\infty}{}_i\, i\cdot c_i\cdot u^{i-1}.$$

Beweis. Vgl. Ch. III § 3 und VI § 4 (5).

(2.6) a) *Ist* $\mathfrak{R}|\mathfrak{k}$ *endlich-algebraisch, B separabel bezüglich* $\mathfrak{k}$ *und e durch* $Ch(\mathfrak{R})$ *unteilbar, so ist* $\mathfrak{R}|\mathfrak{k}$ *separabel.*

b) *Ist* $\Lambda|\mathsf{K}$ *separabelerzeugbar, so ist jedes B-reguläre* $\mathfrak{x}$ *derart, daß* $e_{\mathfrak{R}\,\mathsf{K}(\mathfrak{x})}$ *durch* $Ch(\mathfrak{R})$ *unteilbar ist, separierend in* $\mathfrak{R}|\mathsf{K}$, *also* $\mathfrak{R}|\mathsf{K}$ *separabelerzeugbar.*

Beweis. Für $Ch(\mathfrak{R})=0$ trivial. Es sei $Ch(\mathfrak{R})=p>0$. a) Ist $\mathfrak{R}|\mathfrak{k}$ inseparabel, so existiert ein $\mathfrak{k}'\supseteqq\mathfrak{k}$ derart, daß $\mathfrak{R}|\mathfrak{k}'$ Wurzelkörper vom Grade p ist. Nach (2.4) e) ist B die einzige über b' liegende Bewertung und $p=e'\cdot g'$. Ist e durch p unteilbar, so auch e', also ist $e'=1$, $g'=p$. Also ist für ein $v\in\mathfrak{B}$ $\Lambda=\lambda'(\Phi v)\supset\lambda'$; wegen $v^p\in\mathfrak{k}'$ ist $\Lambda|\lambda'$ inseparabel, also auch $\Lambda|\lambda$. — b) Nach (2.1) existiert ein $\mathfrak{x}$ dieser Art; aus (2.2) und a) folgt, daß $\mathfrak{R}|\mathsf{K}(\mathfrak{x})$ separabel ist.

[8]) Das heißt: für jede B^*-konvergente Folge $\langle z_i\rangle_{m\leqq i<\infty}$ aus $\mathfrak{R}^*$ ist $D^*(\lim_{i\to\infty} z_i)=\lim_{i\to\infty} D^*z_i$.

§ 3. B-uniformisierende n-Tupel

Im a.F.1V. $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ werden als „B-uniformisierende Variable" bekanntlich die Primelemente z von $\mathfrak{B}$ ($B(z)=1$) bezeichnet; sie sind, wenn $\Lambda|\mathsf{K}$ separabel ist, separierend in $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$, und es gilt $D_z\mathfrak{B}\subseteqq\mathfrak{B}$. In Verallgemeinerung dieser Eigenschaft definieren wir: Ist B eine Bewertung des a.F.nV. $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$, so heißt ein n-Tupel $\mathfrak{z}$ aus $\mathfrak{B}$ *B-uniformisierend*, wenn $\mathfrak{z}$ separierend und

$$D_{\mathfrak{z}}\mathfrak{B}\left(=\bigcup_{i=1\ldots n}D_{\mathfrak{z}}^{i}\mathfrak{B}\right)\subseteqq\mathfrak{B}$$

ist. (Wir verlangen nicht, daß ein $z_i\in\mathfrak{M}$ ist!)

(3.1) *Für jedes $\mathfrak{v}$ aus $\mathfrak{B}$ ist $D_{\mathfrak{z}}\mathfrak{v}\in\mathfrak{B}$; insbesondere ist $B(D_{\mathfrak{z}}\mathfrak{v})=0$, genau wenn $\mathfrak{v}$ ebenfalls B-uniformisierend ist.*

Beweis. $D_{\mathfrak{z}}\mathfrak{v}\in\mathfrak{B}$ gilt trivial; ebenso $D_{\mathfrak{v}}\mathfrak{z}=(D_{\mathfrak{z}}\mathfrak{v})^{-1}\in\mathfrak{B}$, falls auch $\mathfrak{v}$ B-uniformisierend ist. — Ist $B(D_{\mathfrak{z}}\mathfrak{v})=0$, so ist $\mathfrak{v}$ separierend, und aus $\sum_1^n D_{\mathfrak{z}}^{i}v_j\cdot D_{\mathfrak{v}}^{j}z_k=\delta_{ik}$ folgt $D_{\mathfrak{v}}^{j}z_k\cdot D_{\mathfrak{z}}\mathfrak{v}\in\mathsf{K}[\ldots D_{\mathfrak{z}}^{i}v_l\ldots]\subseteqq\mathfrak{B}$, also auch $D_{\mathfrak{v}}^{j}z_k\in\mathfrak{B}$ $(j,k=1,\ldots,n)$; daher ist für jedes $a\in\mathfrak{B}$ $D_{\mathfrak{v}}^{j}a=\sum_1^n{}_k D_{\mathfrak{v}}^{j}z_k\cdot D_{\mathfrak{z}}^{k}a\in\mathfrak{B}$.

Im folgenden sei B wieder eine maxdim. Bewertung eines a.F.nV. $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$. Für den Existenzbeweis B-uniformisierender n-Tupel brauchen wir die folgende Verallgemeinerung eines Chevalleyschen Lemmas (CH. VI § 4, Lemma 4):

(3.2) *Zu jeder Differentiation D von $\mathfrak{K}$ mit $D\mathsf{K}\subseteqq\mathsf{K}$ gibt es ein $m\geqq 0$, so daß für alle $a\in\mathfrak{K}$ $B(Da)\geqq B(a)-m$ ist.*

Beweis. Wir wählen ein B-zulässiges $\mathfrak{x}$ mit $B(x_1)=1$ [(2.1)!], eine $\mathfrak{b}$-Ganzheitsbasis $\langle v_1,\ldots,v_k\rangle$ von $\mathfrak{K}|\mathsf{K}(\mathfrak{x})$ [(2.4) d)!] und ein $u\in\mathfrak{K}$ mit $B(u)=0$ und $B^{(i)}(u)>0$ [$2\leq i\leq r$; $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}_{\mathfrak{x},P}$ die unter B liegende Bewertung von $\mathsf{K}(\mathfrak{x})$, $B=B^{(1)}$]. Ist $a\in\mathfrak{K}^{\cdot}$, $B(a)=t$, so ist für genügend großes s $d=a\cdot x_1^{-t}\cdot u^{s}\in\mathfrak{J}$, also $=\sum_1^k{}_i c_i\cdot v_i$ für gewisse $c_i\in\mathfrak{b}$ $(1\leq i\leq k)$, und $B(d)=0$. Hieraus folgt $a^{-1}\cdot Da=x_1^{-1}\cdot t\cdot Dx_1-u^{-1}\cdot s\cdot Du+d^{-1}\cdot\left(\sum_1^k{}_i c_i\cdot Dv_i+v_i\cdot Dc_i\right)$; da ferner wegen $\mathfrak{b}=\mathsf{K}[\mathfrak{x}]_{(P(\mathfrak{x}))}$ und $D\mathsf{K}\subseteqq\mathsf{K}$ für jedes $c\in\mathfrak{b}$ $B(Dc)\geqq\min\{0,B(Dx_1),\ldots,B(Dx_n)\}$ gilt, kann man $-m=\min\{0,B(Du),B(Dv_i),B(Dx_j)-1\,|\,1\leq i\leq k,\ 1\leq j\leq n\}$ setzen.

Hieraus folgt der Existenzsatz:

(3.3) Satz. *Ist $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ separabelerzeugbar, so existiert ein B-uniformisierendes $\mathfrak{z}$.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{x}$ separierend in $\mathfrak{B}$. Nach (3.2) existiert ein m, so daß $B(D_{\mathfrak{x}}\mathfrak{v})\geqq -m$ für alle $\mathfrak{v}$ aus $\mathfrak{B}$ ist, also gibt es ein $\mathfrak{z}$ aus $\mathfrak{B}$, so daß $B(D_{\mathfrak{x}}\mathfrak{z})$ minimal ist; $\mathfrak{z}$ ist ersichtlich separierend. Für jedes $a\in\mathfrak{B}$ ist $\mathfrak{a}_k=\langle z_1,\ldots,z_{k-1},a,z_{k+1},\ldots,z_n\rangle$ aus $\mathfrak{B}$, also $D_{\mathfrak{z}}^{k}a=D_{\mathfrak{z}}\mathfrak{a}_k=(D_{\mathfrak{x}}\mathfrak{z})^{-1}\cdot D_{\mathfrak{x}}\mathfrak{a}_k\in\mathfrak{B}$ $(1\leq k\leq n)$.

Den engen Zusammenhang zwischen „B-uniformisierend" und „B-regulär" zeigt der für die folgenden Ausführungen grundlegende

(3.4) Satz. *Es sei $\Lambda|\mathsf{K}$ separabelerzeugbar; dann gilt:*

$\mathfrak{z}$ ist B-uniformisierend, genau wenn $\mathfrak{z}$ B-regulär und B unverzweigt bezüglich $\mathsf{K}(\mathfrak{z})$ ist. In diesem Falle gilt für jede Differentiation Δ von $\Delta|\mathsf{K}$:

$$\Delta(\Phi a) = \sum_1^n{}_i \Delta(\Phi z_i) \cdot \Phi(D_{\mathfrak{z}}^i a) \qquad (a \in \mathfrak{B}).$$

Beweis. a) Es sei $\mathfrak{z}$ n.g.U. B-regulär (1), B unverzweigt bezüglich $\mathsf{K}(\mathfrak{z})$, P das zu $\Phi_{\mathfrak{z}}$ gehörige Polynom, $\mathfrak{l} = \mathsf{K}(\mathfrak{z}^{(1)})$, $\mathfrak{L}^*$ gemäß (2.5) a) konstruiert (für $j=1$). Nach (2.6) b) ist $\mathfrak{z}$ separierend in $\mathfrak{R}|\mathsf{K}$; jedes $D \in \{D_{\mathfrak{z}}^1, \ldots, D_{\mathfrak{z}}^n\}$ läßt sich wegen $D\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{l}$ (und damit $D\mathfrak{l}_{\mathfrak{R}} \subseteq \mathfrak{l}_{\mathfrak{R}}$) zu einer stetigen Differentiation D^* von $\mathfrak{R}^*$ fortsetzen, und für jedes $a = \sum_0^\infty{}_i c_i \cdot \big(P(\mathfrak{z})\big)^i \in \mathfrak{B}\,[c_i \in \mathfrak{L}^*;$ (2.5) a)!] gilt nach (2.5) b) $D^* a = \sum_0^\infty{}_i D^* c_i \cdot \big(P(\mathfrak{z})\big)^i + D\big(P(\mathfrak{z})\big) \cdot \sum_0^\infty{}_i i \cdot c_i \cdot \big(P(\mathfrak{z})\big)^{i-1}$; wegen $D^*\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}^* \subseteq \mathfrak{B}^*$ ist $D^* a \in \mathfrak{B}^*$, sogar $D^* a = Da \in \mathfrak{B}^* \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{B}$. Also ist $\mathfrak{z}$ B-uniformisierend.

Es sei Δ^i die Differentiation (i) nach $\Phi\mathfrak{z}^{(1)}$ $(2 \leq i \leq n)$ und Δ^1 die triviale Differentiation von $\Delta|\mathsf{K}$ $(\Delta^1\Delta = \{0\})$, ferner D^j die durch $\Phi(D^j c) = \Delta^j(\Phi c)$ $(c \in \mathfrak{L}^*)$ eindeutig bestimmte Differentiation von $\mathfrak{L}^*|\mathsf{K}$ $(1 \leq j \leq n)$. Wegen $\Phi(D_{\mathfrak{z}}^j a) = \Delta^j(\Phi a)$ $(a \in \mathfrak{l})$ stimmt D^j mit $D_{\mathfrak{z}}^j$ in $\mathfrak{l}$ überein; da $\mathfrak{L}^*|\mathfrak{l}$ (ebenso wie $\Delta|\Phi\mathfrak{l}$) endlich-separabel ist, ist D^j die einzige Differentiation von $\mathfrak{L}^*|\mathsf{K}$ in $\mathfrak{R}^*$ mit dieser Eigenschaft und wird deshalb durch $D_{\mathfrak{z}}^j{}^*$ induziert $(1 \leq j \leq n)$, also gilt

$$\Phi(D_{\mathfrak{z}}^j{}^* a) = \Phi(D_{\mathfrak{z}}^j{}^* c_0) + \Phi(P^{(j)}(\mathfrak{z}) \cdot c_1) = \Delta^j(\Phi a) + P^{(j)}(\Phi\mathfrak{z}) \cdot \Phi c_1 \quad (\Phi a = \Phi c_0!).$$

Für jede Differentiation Δ von $\Delta|\mathsf{K}$ ist $\Delta(\Phi a) = \sum_1^n{}_j \Delta(\Phi z_j) \cdot \Delta^j(\Phi a) = \sum_1^n{}_j \Delta(\Phi z_j) \cdot \Phi(D_{\mathfrak{z}}^j a) - \Phi c_1 \cdot \sum_1^n{}_j \Delta(\Phi z_j) \cdot P^{(j)}(\Phi\mathfrak{z})$; hiervon ist die letzte Summe gleich Null wegen $P(\Phi\mathfrak{z}) = 0$. — Insbesondere ist

$$\Delta^j(\Phi v_k) = \Delta^j(\Phi z_1) \cdot \Phi(D_{\mathfrak{z}}^1 v_k) + \Phi(D_{\mathfrak{z}}^j v_k) \quad (2 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq n;\ \mathfrak{v} \text{ aus } \mathfrak{B}).$$

b) Es sei $\mathfrak{y}$ B-uniformisierend, $\mathfrak{z}$ nach (2.1) b) konstruiert. Dann hat die Matrix $\langle \Delta^j(\Phi y_k)\rangle_{2 \leq j \leq n,\, 1 \leq k \leq n}$ den Rang $n-1$; denn anderenfalls wäre für ein $\langle \alpha_2, \ldots, \alpha_n\rangle \neq \langle 0, \ldots, 0\rangle$ aus $\Delta \sum_2^n{}_j \alpha_i \cdot \Delta^j(\Phi y_k) = \sum_1^n{}_j \alpha_j \cdot \Phi(D_{\mathfrak{z}}^j y_k) = 0$ $\Big($mit $\alpha_1 = \sum_2^n{}_j \alpha_j \cdot \Delta^j(\Phi z_1)$; $1 \leq k \leq n\Big)$, also $|\Phi(D_{\mathfrak{z}}^j y_k)|_{1 \ldots n} = 0$, also $B(D_{\mathfrak{z}}\mathfrak{y}) > 0$ im Widerspruch zu (3.1). Daher ist für ein k $\Phi\mathfrak{y}^{(k)}$ separierend in $\Delta|\mathsf{K}$, also $\mathfrak{y}$ B-regulär (k). Ist Q das zu $\Phi\mathfrak{y}$ gehörige Polynom, $B\big(Q(\mathfrak{y})\big) = m\,(>0)$, $B(u) = 1$, so ist $v = Q(\mathfrak{y}) \cdot u^{-m} \in \mathfrak{B}$, und wegen der Separabilität (k) von Q ist $Q^{(k)}(\mathfrak{y}) = D_{\mathfrak{y}}^k\big(Q(\mathfrak{y})\big) = m \cdot u^{m-1} \cdot v \cdot D_{\mathfrak{y}}^k u + u^m \cdot D_{\mathfrak{y}}^k v$ eine Einheit in $\mathfrak{B}$, also $m = 1$, also B unverzweigt bezüglich $\mathsf{K}(\mathfrak{y})$.

§ 4. Gestufte Bewertungen

Als erste Anwendung unserer Ergebnisse übertragen wir den Begriff „uniformisierend" auf gestufte Bewertungen und bringen ihn in Zusammenhang mit den Differentiationen in den zugehörigen allgemeinen Bewertungsringen.

Es sei $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ ein a.F. nV. $(n>1)$; $\boldsymbol{B}=\langle B^{\langle 1\rangle},\ldots,B^{\langle n\rangle}\rangle$ heiße eine *gestufte Bewertung* von $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$, wenn $B^{\langle i\rangle}$ eine maxdim. Bewertung des a.F. iV. $\mathfrak{K}^{\langle i\rangle}|\mathsf{K}$ ist, wobei $\mathfrak{K}^{\langle n\rangle}=\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}^{\langle i-1\rangle}=\Lambda^{\langle i\rangle}$ $(1\leq i\leq n)$. Ist $a=a^{\langle n\rangle}\in\mathfrak{B}^{\langle n\rangle},\ldots,a^{\langle i\rangle}\in\mathfrak{B}^{\langle i\rangle}$, so sei $a^{\langle i-1\rangle}=\Phi^{\langle i\rangle}a^{\langle i\rangle}$ $(1\leq i\leq n)$. $\mathfrak{C}_i=\{a\in\mathfrak{K}\,|\,a^{\langle j\rangle}\in\mathfrak{B}^{\langle j\rangle}\ (i\leq j\leq n)\}$ ist ein allgemeiner Bewertungsring von $\mathfrak{K}$ $(1\leq i\leq n)$, $\mathfrak{P}_k=\{a\in\mathfrak{C}_k\,|\,a^{\langle k\rangle}\in\mathfrak{M}^{\langle k\rangle}\}$ ein Primideal von $\mathfrak{C}_i$ $(i\leq k\leq n)$; insbesondere ist $\mathfrak{P}_i$ das Ideal aller Nichteinheiten von $\mathfrak{C}_i$, und es gilt $\mathfrak{B}^{\langle n\rangle}=\mathfrak{C}_n\supset\cdots\supset\mathfrak{C}_1\supset\mathfrak{P}_1\supset\cdots\supset\mathfrak{P}_n=\mathfrak{M}^{\langle n\rangle}$ [9]).

Ist $\mathfrak{x}\in\mathfrak{C}_1\times\cdots\times\mathfrak{C}_n$, so bezeichnet $\mathfrak{x}^{\langle i\rangle}$ das i-Tupel $\langle x_1^{\langle i\rangle},\ldots,x_i^{\langle i\rangle}\rangle$ $(0\leq i\leq n)$ und $D^j_{\mathfrak{x}^{\langle i\rangle}}$, falls $\mathfrak{x}^{\langle i\rangle}$ separierend (in $\mathfrak{K}^{\langle i\rangle}|\mathsf{K}$) ist, die Differentiation (j) nach $\mathfrak{x}^{\langle i\rangle}$ von $\mathfrak{K}^{\langle i\rangle}|\mathsf{K}$ $(1\leq j\leq i)$. Als ***B*-uniformisierend** bezeichnen wir jedes $\mathfrak{z}\in\mathfrak{P}_1\times\cdots\times\mathfrak{P}_n$ derart, daß $\mathfrak{z}^{\langle i\rangle}$ $B^{\langle i\rangle}$-uniformisierend (in $\mathfrak{K}^{\langle i\rangle}|\mathsf{K}$) ist $(0\leq i\leq n)$. Für $i=0$ bedeutet dies die Separabilität von $\mathfrak{K}^{\langle 0\rangle}|\mathsf{K}$, die wir im folgenden stets voraussetzen; aus ihr folgt, daß $\mathfrak{K}^{\langle j\rangle}|\mathsf{K}$ separabelerzeugbar ist [$0\leq j\leq n$; (2.6) b)!].

(4.1) *$\mathfrak{z}$ ist **B**-uniformisierend, genau wenn $B^{\langle i\rangle}(z_i^{\langle i\rangle})=1$ $(1\leq i\leq n)$ ist.*

Beweis. Es sei $B^{\langle i\rangle}(z_i^{\langle i\rangle})=1$ $(1\leq i\leq n)$. Ist $\mathfrak{z}^{\langle j-1\rangle}$ $B^{\langle j-1\rangle}$-uniformisierend (für $j=1$ trivial!), so ist nach (2.1) $\mathfrak{z}^{\langle j\rangle}$ $B^{\langle j\rangle}$-regulär und $B^{\langle j\rangle}$ unverzweigt bezüglich $\mathsf{K}(\mathfrak{z}^{\langle j\rangle})$, also ist $\mathfrak{z}^{\langle j\rangle}$ nach (3.4) $B^{\langle j\rangle}$-uniformisierend. — Es sei $\mathfrak{z}$ ***B*-uniformisierend**; nach (3.4) ist $\mathfrak{z}^{\langle j\rangle}$ $B^{\langle j\rangle}$-regulär und $B^{\langle j\rangle}$ unverzweigt bezüglich $\mathsf{K}(\mathfrak{z}^{\langle j\rangle})$, also nach (2.2) (wegen $z_j^{\langle j-1\rangle}=0$) $B^{\langle j\rangle}(z_j^{\langle j\rangle})=1$ $(1\leq j\leq n)$.

In $\mathfrak{P}_1\times\cdots\times\mathfrak{P}_n$ sind die ***B*-uniformisierenden** n-Tupel nicht nur ausgezeichnet in bezug auf die Differentiationen in den Bewertungsringen $\mathfrak{B}^{\langle i\rangle}$, sondern auch hinsichtlich der Differentiationen in den allgemeinen Bewertungsringen $\mathfrak{C}_i\subset\mathfrak{K}$ $(1\leq i\leq n)$, wie der folgende Satz zeigt:

(4.2) Satz. *Ein separierendes $\mathfrak{z}\in\mathfrak{P}_1\times\cdots\times\mathfrak{P}_n$ ist **B**-uniformisierend, genau wenn $D^j_{\mathfrak{z}}\mathfrak{C}_k\subseteq\mathfrak{C}_k$ $(1\leq j\leq k\leq n)$ gilt.*

Wir beweisen zunächst:

(4.3) *Es sei $\mathfrak{z}\in\mathfrak{P}_1\times\cdots\times\mathfrak{P}_n$, für ein $i_0\in\{1,\ldots,n-1\}$ sei $\mathfrak{z}^{\langle i_0\rangle}$ separierend und $\mathfrak{z}^{\langle i\rangle}$ $B^{\langle i\rangle}$-uniformisierend $(i_0<i\leq n)$; dann ist*

$$D^j_{\mathfrak{z}^{\langle i_0\rangle}}a^{\langle i_0\rangle}=(D^j_{\mathfrak{z}}a)^{\langle i_0\rangle}\quad(a\in\mathfrak{C}_{i_0+1},\ 1\leq j\leq i_0).$$

Beweise. (4.3): Gilt für ein $i>i_0$ $D^j_{\mathfrak{z}^{\langle i\rangle}}a^{\langle i\rangle}=(D^j_{\mathfrak{z}}a)^{\langle i\rangle}$ $(a\in\mathfrak{C}_{i_0+1},\ 1\leq j\leq i_0$; für $i=n$ trivial!), so ist nach (3.4) $D^j_{\mathfrak{z}^{\langle i-1\rangle}}a^{\langle i-1\rangle}=\sum_1^i{}_k\, D^j_{\mathfrak{z}^{\langle i-1\rangle}}z_k^{\langle i-1\rangle}\cdot(D^k_{\mathfrak{z}^{\langle i\rangle}}a^{\langle i\rangle})^{\langle i-1\rangle}=$ (wegen $z_i^{\langle i-1\rangle}=0$) $=(D^j_{\mathfrak{z}^{\langle i\rangle}}a^{\langle i\rangle})^{\langle i-1\rangle}=(D^j_{\mathfrak{z}}a)^{\langle i-1\rangle}$.

(4.2): Es sei $\mathfrak{z}$ ***B*-uniformisierend**; dann ist für alle $a\in\mathfrak{C}_i$ $(D^j_{\mathfrak{z}}a)^{\langle i\rangle}=[(4.3)!]=D^j_{\mathfrak{z}^{\langle i\rangle}}a^{\langle i\rangle}\in\mathfrak{B}^{\langle i\rangle}$, also $D^j_{\mathfrak{z}}a\in\mathfrak{C}_i$ $(1\leq j\leq i\leq n)$. — Es sei $D^j_{\mathfrak{z}}\mathfrak{C}_k\subseteq\mathfrak{C}_k$ $(1\leq j\leq k\leq n)$. Ist $\mathfrak{z}^{\langle i\rangle}$ $B^{\langle i\rangle}$-uniformisierend (dies trifft zu für $i=n$!), so ist nach (3.4) $\mathfrak{z}^{\langle i\rangle}$ $B^{\langle i\rangle}$-regulär (i), $\mathfrak{z}^{\langle i-1\rangle}$ separierend. Ist $\alpha\in\mathfrak{B}^{\langle i-1\rangle}$, $a\in\mathfrak{C}_{i-1}$ ein Repräsentant von α, so ist $D^j_{\mathfrak{z}}a\in\mathfrak{C}_{i-1}$, also $D^j_{\mathfrak{z}^{\langle i-1\rangle}}\alpha=[(4.3)!]=(D^j_{\mathfrak{z}}a)^{\langle i-1\rangle}\in\mathfrak{B}^{\langle i-1\rangle}$ $(1\leq j\leq i-1)$ also $\mathfrak{z}^{\langle i-1\rangle}$ $B^{\langle i-1\rangle}$-uniformisierend.

[9]) Vgl. W. KRULL: Allgemeine Bewertungstheorie. J. f. Math. **167**, 160—196 (1931), insb. § 5.

Für $\boldsymbol{B}$-uniformisierendes $\mathfrak{z}$ wird $\mathfrak{C}_k$ durch $D_\mathfrak{z}^1, \ldots, D_\mathfrak{z}^k$ in sich abgebildet, dagegen ist $D_\mathfrak{z}^j\mathfrak{C}_k \subsetneq \mathfrak{C}_k$ für $j > k$ [z.B. ist $z_j \cdot z_k^{-1} \in \mathfrak{P}_j < \mathfrak{C}_k$, aber $D_\mathfrak{z}^j(z_j \cdot z_k^{-1}) = z_k^{-1} \notin \mathfrak{C}_k$]; also ist $D_\mathfrak{z}\mathfrak{C}_k \subseteq \mathfrak{C}_k$ nur für $k = n$ erfüllt. Dies kann jedoch nicht als Mangel unserer Definition „$\boldsymbol{B}$-uniformisierend" angesehen werden, denn es gibt überhaupt kein $\mathfrak{y}$ aus $\mathfrak{C}_n$ mit $D_\mathfrak{y}\mathfrak{C}_k \subseteq \mathfrak{C}_k$ $(1 \leq k \leq n)$; es gilt sogar:

(4.4) *Für kein* $\mathfrak{y}$ *aus* $\mathfrak{C}_n$ *gilt zugleich* $D_\mathfrak{y}\mathfrak{C}_n \subseteq \mathfrak{C}_n$ *und* $D_\mathfrak{y}\mathfrak{C}_{n-1} \subseteq \mathfrak{C}_{n-1}$.

Beweis. Ist $D_\mathfrak{y}\mathfrak{C}_n \subseteq \mathfrak{C}_n$, also $\mathfrak{y}$ $B^{\langle n\rangle}$-uniformisierend, $u \in \mathfrak{P}_n$, $v \in \mathfrak{C}_n - \mathfrak{C}_{n-1}$, so ist $u \cdot v^k \in \mathfrak{P}_n \subseteq \mathfrak{C}_{n-1}$ und $\left(D_\mathfrak{y}(u \cdot v^k)\right)^{\langle n-1\rangle} = (v^{\langle n-1\rangle})^k \cdot (D_\mathfrak{y}^i u)^{\langle n-1\rangle}$ $(1 \leq i \leq n)$. Nach (3.4) ist $\mathfrak{y}$ $B^{\langle n\rangle}$-regulär, also, wenn P das zu $\boldsymbol{\Phi}^{\langle n\rangle}\mathfrak{y}$ gehörige Polynom ist, $D_\mathfrak{y}^j\left(P(\mathfrak{y})\right) = P^{(j)}(\mathfrak{y}) \notin \mathfrak{P}_n$ für ein j. Für $u = P(\mathfrak{y})$ ist daher $(D_\mathfrak{y}^i u)^{\langle n-1\rangle} \neq 0$, also, wegen $B^{\langle n-1\rangle}(v^{\langle n-1\rangle}) < 0$, für genügend großes k $D_\mathfrak{y}^j(u \cdot v^k) \notin \mathfrak{C}_{n-1}$.

Wir beweisen noch, in Analogie zu (3.1):

(4.5) *Es sei* $\mathfrak{z}$ $\boldsymbol{B}$*-uniformisierend,* $\mathfrak{y} \in \mathfrak{P}_1 \times \cdots \times \mathfrak{P}_n$. *Dann ist* $|D_\mathfrak{z}^j y_i|_{1\ldots k} \in \mathfrak{C}_k$ $(1 \leq k \leq n)$; $\mathfrak{y}$ *ist* $\boldsymbol{B}$*-uniformisierend, genau wenn* $|D_\mathfrak{z}^j v_i|_{1\ldots k} \notin \mathfrak{P}_k$ $(1 \leq k \leq n)$ *ist.*

Beweis. $|D_\mathfrak{z}^j y_i|_{1\ldots k} \in \mathfrak{C}_k$ folgt aus (4.2). — Nach (4.3) ist $(|D_\mathfrak{z}^j y_i|_{1\ldots k})^{\langle k\rangle} = |D_{\mathfrak{z}^{\langle k\rangle}}^j y_i^{\langle k\rangle}|_{1\ldots k}$; also ist $|D_\mathfrak{z}^j y_i|_{1\ldots k} \notin \mathfrak{P}_k$, genau wenn $|D_{\mathfrak{z}^{\langle k\rangle}}^j y_i^{\langle k\rangle}|_{1\ldots k} \notin \mathfrak{M}^{\langle k\rangle}$, genau wenn $\mathfrak{y}^{\langle k\rangle}$ $B^{\langle k\rangle}$-uniformisierend ist $(1 \leq k \leq n)$.

§ 5. Differenten und Differentiale

Es sei B eine maxdim. Bewertung des a.F. nV. $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$, $\mathsf{K} \subseteq \mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}|\mathfrak{k}$ endlich-algebraisch. Dann definieren wir nach Ch. IV § 8 die *B-Differente* von $\mathfrak{K}|\mathfrak{k}$ („differential exponent"): $\mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathfrak{k}} B = \max\{m \mid$ aus $B(a) \geq -m$ folgt $\mathrm{Sp}_{\mathfrak{K}^*|\mathfrak{k}^*} a \in \mathfrak{b}^*$ $(a \in \mathfrak{K})\}$.

Aus Ch. IV § 8, Theorem 7[10]) bzw. 8 folgt mit Hilfe von (2.3) der „Exponentensatz":

(5.1) a) $\mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathfrak{k}} B < \infty$, *genau wenn* $\mathfrak{K}|\mathfrak{k}$ *separabel ist;*

b) $\mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathfrak{k}} B \geq e - 1$; *hierbei gilt das Gleichheitszeichen, genau wenn* B *separabel bezüglich* $\mathfrak{k}$ *und* e *durch* $Ch(\mathfrak{K})$ *unteilbar ist;*

sowie der „Schachtelungssatz":

(5.2) *Ist* $\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}|\mathfrak{l}$ *endlich-algebraisch, so ist*

$$\mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathfrak{l}} B = \mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathfrak{k}} B + e_{\mathfrak{K}|\mathfrak{k}} \cdot \mathrm{Diff}_{\mathfrak{k}|\mathfrak{l}} b.$$

Als Differentiale eines a.F. 1V. $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ definiert Ch. gewisse Linearfunktionen auf dem $\mathsf{K}_\mathfrak{K}$-Modul aller „repartitions" und überträgt auf sie in einer natürlichen Weise die Bewertungen von $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ (Ch. II §§ 4—6). Ist $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ separabel-erzeugbar, so läßt sich jedes Differential in der Form $u \cdot dx$ $(u, x \in \mathfrak{K})$ darstellen (Ch. VI § 3). Differente und Differentiale hängen durch die „Riemannsche Formel"

(5.3) $B(dx) = \mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}(x)} B$ $\qquad$ ($x \in \mathfrak{B}$, *separierend in* $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$)

---

[10]) Ch. behandelt nur den separablen Fall. Ist $\mathfrak{K}|\mathfrak{k}$ inseparabel, so gilt dasselbe für $\mathfrak{K}^*|\mathfrak{k}^*$ (Ch. IV S. 68 oben), also ist $Sp_{\mathfrak{K}^*|\mathfrak{k}^*}\mathfrak{K} = \{0\}$, also $\mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathfrak{k}} B = \infty$; und nach (2.6) a) ist stets B inseparabel bez. $\mathfrak{k}$ oder e durch $Ch(\mathfrak{K})$ teilbar.

zusammen. Sie wird in CH. VI § 3, Th. 7 nur für den Fall $\mathsf{K} = \mathsf{K}_{\mathfrak{K}}$ bewiesen, gilt jedoch auch ohne diese Voraussetzung, da für endlich-separables $\tilde{\mathsf{K}}|\mathsf{K}$ stets $\mathrm{Diff}_{\tilde{\mathsf{K}}(x)|\mathsf{K}(x)}\tilde{b} = 0$ [11]) ist.

Im folgenden konstruieren wir für separabelerzeugbare a.F.nV. $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ Differentiale (n-ten Grades), übertragen auf sie die maxdim. Bewertungen von $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ derart, daß im Falle $n = 1$ Übereinstimmung mit CH. besteht, und beweisen schließlich eine Verallgemeinerung der Riemannschen Formel.

Als *Differentiale* von $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ bezeichnen wir die Elemente $u \cdot d\mathfrak{x}\,(= u \cdot d_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}}\mathfrak{x}) = u \cdot \partial\mathfrak{x} + H_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}}$ des Restklassenmoduls $\boldsymbol{d}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}} = \mathfrak{K} \cdot \partial\mathfrak{K}^n / H_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}}$, wobei ∂ eine eineindeutige Abbildung von $\mathfrak{K}^n = \mathfrak{K} \times \overset{n}{\cdots} \times \mathfrak{K}$, $\mathfrak{K} \cdot \partial\mathfrak{K}^n$ den durch $\partial\mathfrak{K}^n$ erzeugten freien $\mathfrak{K}$-Modul und $H_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}}$ den durch $\{\partial\mathfrak{v} - D_{\mathfrak{z}}\mathfrak{v} \cdot \partial\mathfrak{z} | \mathfrak{v}, \mathfrak{z} \in \mathfrak{K}^n$, $\mathfrak{z}$ separierend in $\mathfrak{K}|\mathsf{K}\}$ erzeugten Untermodul bezeichnet. Ersichtlich ist $H_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}} = H_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}_{\mathfrak{K}}}$, also auch $\boldsymbol{d}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}} = \boldsymbol{d}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}_{\mathfrak{K}}}$, und es gilt:

(5.4) $\boldsymbol{d}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}}$ *ist ein eingliedriger (unitärer)* $\mathfrak{K}$*-Modul; für separierendes* $\mathfrak{z}$ *aus* $\mathfrak{K}$ *ist* $d\mathfrak{z} \neq 0$ *und* $d\mathfrak{v} = D_{\mathfrak{z}}\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{z}$ ($\mathfrak{v}$ aus $\mathfrak{K}$).

$\boldsymbol{d}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}}$ ist durch (5.4) im wesentlichen eindeutig bestimmt; insbesondere gilt (5.4) für die Chevalleyschen Differentiale (CH. II § 6, VI § 3 Th. 4 und § 5 Th. 9), die wir deshalb mit den Elementen $\in \boldsymbol{d}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}}$ im Falle $n = 1$ identifizieren können.

Für die Übertragung der Bewertungen auf die Differentiale brauchen wir eine Verallgemeinerung der Differente auf a.F.nV. $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$: $\mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}} B = \min\{\mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}(\mathfrak{x})} B | \mathfrak{x}$ Tr.-B. von $\mathfrak{K}|\mathsf{K}\}$. Ersichtlich ist $\mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}} B < \infty$, genau wenn $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ separabelerzeugbar ist, und aus (5.1) b) und (2.1) folgt unmittelbar:

(5.5) $\mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}} B = 0$, *genau wenn für ein in* $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ *separierendes* $\mathfrak{x}$ B *separabel und unverzweigt bezüglich* $\mathsf{K}(\mathfrak{x})$ *ist, insbesondere wenn* $\Lambda|\mathsf{K}$ *separabelerzeugbar ist.*

Bei vollkommenem K ist also stets $\mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}} B = 0$. Daß dies für separabelerzeugbare a.F.nV. (schon im Falle $n = 1$) nicht allgemein gilt, zeigt folgendes Beispiel [12]): Es sei $Ch(\mathsf{K}_0) = p > 0$, $\mathsf{K} = \mathsf{K}_0(\xi, \eta)$, $\mathfrak{k} = \mathsf{K}(x)$, $\mathfrak{K} = \mathfrak{k}(y)$, wobei $\langle x, \xi, \eta\rangle$ alg.-unabh. bezüglich K_0 und y Nullstelle des bezüglich $\mathfrak{k}$ irreduziblen Polynoms $Y^p - \eta \cdot (x^p - \xi) - \eta$ sei; B liege über der Bewertung $b_{x, X^p - \xi}$ von $\mathfrak{k}|\mathsf{K}$. Dann ist $\Phi x = \sqrt[p]{\xi} \in \Lambda$, $\Phi y = \sqrt[p]{\eta} \in \Lambda$ und x separierend in $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$. Da $\mathsf{K}(\sqrt[p]{\xi}, \sqrt[p]{\eta})|\mathsf{K}$ nichteinfach ist, gilt dasselbe für $\Lambda|\mathsf{K}$, und für kein $\zeta \in \Lambda$ ist $\Lambda|\mathsf{K}(\zeta)$ separabel [13]), also ist für jedes $z \in \mathfrak{K} - \mathsf{K}_{\mathfrak{K}}$ B inseparabel bezüglich $\mathsf{K}(z)$, also nach (5.1) b) $\mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}(z)} B > 0$.

Wir übertragen nun die maxdim. Bewertungen B von $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ auf $\boldsymbol{d}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}}$ durch die Festsetzung: $B(u \cdot d\mathfrak{z}) = B(u) + B(d\mathfrak{z})$ und $B(d\mathfrak{z}) = \mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}} B$ für B-uniformisierendes $\mathfrak{z}$, $u \in \mathfrak{K}$ [(3.1), (5.4)!]. Im Falle $n = 1$ stimmt dies mit CH.

[11]) Ist $b_{z,P}$ die unter $\tilde{b} = \tilde{b}_{z,\tilde{P}}$ ($z = x$ oder $= x^{-1}$) liegende Bewertung von $\mathsf{K}(x)$, so ist P durch $\tilde{P}$, aber nicht durch $\tilde{P}^2$ teilbar, also $\tilde{b}$ unverzweigt bezüglich $\mathfrak{k}$. Ferner ist $\tilde{b}$ separabel bezüglich $\mathfrak{k}$, also gilt die Gleichung nach (5.1) b).

[12]) $\mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}} B > 0$ ist jedoch als Ausnahmefall anzusehen, denn jedes projektive Bewertungssystem $\mathfrak{S}_{|\mathfrak{z}|}$ ($\mathfrak{z}$ separierend in $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$) enthält höchstens endlich viele Bewertungen B dieser Art [(6.6*)!].

[13]) Vgl. G. PICKERT: Einführung in die Höhere Algebra, Göttingen 1951; insbesondere § 31 S. 196 unten und Aufgabe 2.

überein; denn es gibt ein separierendes $x \in \mathfrak{B}$ mit $\mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}(x)} B = \mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}} B$, nach (5.3) ist $B(dx) = \mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}} B$ und x B-uniformisierend wegen $B(dx) = \mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}} B \leq \mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}(v)} B = B(dv) = B(D_x v) + B(dx)$ $(v \in \mathfrak{B}$, separierend). — Aus (3.1) folgt unmittelbar:

(5.6) $B(d\mathfrak{v}) \geq \mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}} B$ ($\mathfrak{v}$ *aus* $\mathfrak{B}$); *das Gleichheitszeichen gilt, genau wenn* $\mathfrak{v}$ *B-uniformisierend ist.*

Um die Riemannsche Formel auf Differentiale $d\mathfrak{x}$ B-zulässiger[14]) separierender n-Tupel $\mathfrak{x}$ eines a.F. nV. $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ verallgemeinern zu können, brauchen wir den Begriff der „Semiregularität": ein B-zulässiges (k) $\mathfrak{x}$ heiße *B-semiregulär (k)*, wenn für ein $z \in \mathfrak{K}$ $\langle x_1, \ldots, x_{k-1}, z, x_{k+1}, \ldots, x_n \rangle$ B-uniformisierend ist.

(5.7) *Jedes B-reguläre (k) $\mathfrak{x}$ ist B-semiregulär (k).*

(5.8) *Ist $\Lambda|\mathsf{K}$ separabelerzeugbar und $\mathfrak{x}$ B-semiregulär (k), so ist* $\mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}(\mathfrak{x}^{(k)})} B = 0$.

Beweise[15]). (5.7): Für $B(z) = 1$ ist nach (2.1) $\mathfrak{z} = \langle z, x_2, \ldots, x_n \rangle$ B-regulär (1) und B unverzweigt bezüglich $\mathsf{K}(\mathfrak{z})$; nach (3.4) ist $\mathfrak{z}$ B-uniformisierend.

(5.8): Für ein $z \in \mathfrak{B}$ ist $\mathfrak{z} = \langle z, x_2, \ldots, x_n \rangle$ B-uniformisierend, nach (3.4) ist B separabel und unverzweigt bezüglich $\mathsf{K}(\mathfrak{z})$. B ist eine Bewertung von $\mathfrak{K}|\mathsf{K}(\mathfrak{x}^{(1)})$, z separierend in $\mathfrak{K}|\mathsf{K}(\mathfrak{x}^{(1)})$, also ist nach (5.5) $\mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}(\mathfrak{x}^{(1)})} B = 0$.

Daß es tatsächlich a.F. nV. $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ (auch solche mit vollkommenem Koeffizientenkörper K) gibt, die separierende B-zulässige (k) aber B-nichtsemireguläre (k) $\mathfrak{x}$ besitzen, zeigt das obenstehende Beispiel: Ersichtlich ist $\langle x, \xi, \eta \rangle$ separierend in $\mathfrak{K}|\mathsf{K}_0$ und B-zulässig (1); wählt man K_0 vollkommen, so ist wegen $\mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}} B > 0$ nach (5.8) $\langle x, \xi, \eta \rangle$ B-nichtsemiregulär (1) (in $\mathfrak{K}|\mathsf{K}_0$).

Da im Falle $n = 1$ ersichtlich jedes B-zulässige x (d.h. $x \in \mathfrak{B} - \mathsf{K}_{\mathfrak{K}}$) B-semiregulär ist, ist der folgende Satz eine Verallgemeinerung der Riemannschen Formel:

(5.9) Satz. *Ist $\mathfrak{x}$ B-zulässig (k) und separierend in $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$, so ist*

$$B(d\mathfrak{x}) \geq \mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}(\mathfrak{x})} B - \mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}(\mathfrak{x}^{(k)})} B - \mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}} B;$$

das Gleichheitszeichen gilt, genau wenn $\mathfrak{x}$ B-semiregulär (k) ist.

Ist $\Lambda|\mathsf{K}$ separabelerzeugbar, so gilt für jedes B-semiregulären $\mathfrak{x}$ sogar

$$B(d\mathfrak{x}) = \mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}(\mathfrak{x})} B.$$

Beweis[15]). Es sei $\mathfrak{l} = \mathsf{K}(\mathfrak{x}^{(1)})$, $z \in \mathfrak{B}$, $\mathfrak{z} = \langle z, x_2, \ldots, x_n \rangle$; dann ist $d\mathfrak{z} = D_{\mathfrak{x}}\mathfrak{z} \cdot d\mathfrak{x} = D^1_{\mathfrak{x}} z \cdot d\mathfrak{x}$ und $d_{\mathfrak{K}|\mathfrak{l}} z = D^1_{\mathfrak{x}} z \cdot d_{\mathfrak{K}|\mathfrak{l}} x_1$. Nach (5.3) ist $B(d_{\mathfrak{K}|\mathfrak{l}} x_1) = \mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}(\mathfrak{x})} B$. Wählt man z B-uniformisierend in $\mathfrak{K}|\mathfrak{l}$, so ist nach (5.6) $B(d_{\mathfrak{K}|\mathfrak{l}} z) = \mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathfrak{l}} B$ $(< \infty)$ und $B(d\mathfrak{z}) \geq \mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}} B$, also $B(d\mathfrak{x}) \geq \mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}} B - \mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathfrak{l}} B + \mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}(\mathfrak{x})} B$; dabei gelten die Ungleichheitszeichen, wenn $\mathfrak{x}$ B-nichtsemiregulär (1) ist. Ist $\mathfrak{x}$ B-semiregulär (1), so gibt es ein $z \in \mathfrak{B}$ derart, daß $\mathfrak{z}$ B-uniformisierend ist, also gilt wegen (5.6) die letztere Ungleichung mit $\leq$ statt $\geq$. Der Rest folgt aus (5.5) und (5.8).

[14]) Für B-nichtzulässige $\mathfrak{y}$ ist ein einfacher Zusammenhang zwischen $B(d\mathfrak{y})$ und $\mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}(\mathfrak{y})} B$ nicht zu erwarten. Ist z.B. $n > 1$, $\mathfrak{x}$ B-zulässig, $B(x_n) > 0$, $\mathfrak{y}_i = \langle x_1 \cdot x_n^i, x_2, \ldots, x_n \rangle$ (B-nichtzulässig für $i \neq 0$!), so sind die $B(d\mathfrak{y}_i)$ paarweise verschieden, dagegen [wegen $\mathsf{K}(\mathfrak{y}_i) = \mathsf{K}(\mathfrak{x})$] alle B-Differenten $\mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}(\mathfrak{y}_i)} B$ gleich.

[15]) Im Beweis wird o.B.d.A. $k = 1$ angenommen.

Als eine befriedigende Verallgemeinerung der Riemannschen Formel kann dieser Satz nur im Falle $Ch(\mathfrak{K}) = 0$ angesehen werden, in dem stets $B(d\mathfrak{x}) = \mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}(\mathfrak{x})} B$ ($\mathfrak{x}$ B-zulässig) gilt[4]). Bei beliebiger Charakteristik und vollkommenem Koeffizientenkörper gilt, wie in § 6 gezeigt wird, diese Gleichung wenigstens für fast alle Bewertungen B des zu $\mathfrak{x}$ gehörigen projektiven Bewertungssystems ($\mathfrak{x}$ separierend).

§ 6. Über projektive Bewertungssysteme

Mit Hilfe der in §§ 2—3 bewiesenen Tatsachen wollen wir nun die Ergebnisse von KR. § 6 über projektive Bewertungssysteme durch einige Sätze ergänzen.

Zunächst beweisen wir einige Hilfssätze über die „projektiven Transformationen" (von $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$), d.h. die durch

$$\Omega\mathfrak{x} = \left\langle \frac{\sum_0^n \omega_{1i} x_i}{\sum_0^n \omega_{0i} x_i}, \ldots, \frac{\sum_0^n \omega_{ni} x_i}{\sum_0^n \omega_{0i} x_i} \right\rangle \quad (\text{mit } x_0 = 1;\ \langle \omega_{ij} \rangle_{0 \ldots n} \text{ regulär aus } \mathsf{K})$$

definierten eineindeutigen Abbildungen Ω von der Menge $\mathfrak{X}$ aller Tr.-B. $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ auf $\mathfrak{X}$. Ihre Gesamtheit bildet eine Gruppe $P_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}}$, echte Obergruppe der Gruppe $G_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}}$ aller ganzlinearen Transformationen Γ:

$$\Gamma\mathfrak{x} = \left\langle \sum_0^n \gamma_{1i} x_i, \ldots, \sum_0^n \gamma_{ni} x_i \right\rangle \quad (\text{mit } x_0 = 1;\ \langle \gamma_{ij} \rangle_{1 \ldots n} \text{ regulär aus } \mathsf{K}).$$

Mit L_Ω bezeichnen wir das (bis auf einen Faktor $\in \mathsf{K}^\cdot$ eindeutig bestimmte) Polynom $\omega_{00} + \omega_{01} X_1 + \cdots + \omega_{0n} X_n$. Es gilt

(6.1) a) $L_\Omega(\mathfrak{x}) \cdot L_{\Omega^{-1}}(\Omega\mathfrak{x}) \in \mathsf{K}^\cdot \qquad (\Omega \in P_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}},\ \mathfrak{x} \in \mathfrak{X})$.

b) *Jedes* $\Omega \in P_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}} - G_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}}$ *läßt sich als Produkt* $\Omega = \tilde{\Gamma} \cdot \mathsf{T} \cdot \Gamma$ *für geeignete* $\Gamma, \tilde{\Gamma} \in G_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}}$ *mit* $L_\Omega = \gamma_{n0} + \gamma_{n1} X_1 + \cdots + \gamma_{nn} X_n$ *darstellen* ($\mathsf{T} \in P_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}}$ *sei durch* $\mathsf{T}\mathfrak{x} = \left\langle \frac{x_1}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{1}{x_n} \right\rangle$ ($\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}$) *definiert*).

c) $D_{\mathfrak{x}}(\Omega\mathfrak{x}) \cdot \left(L_\Omega(\mathfrak{x})\right)^{n+1} \in \mathsf{K}^\cdot \qquad (\Omega \in P_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}},\ \mathfrak{x} \in \mathfrak{X})$.

Beweis. a) Es sei $\mathfrak{y} = \Omega\mathfrak{x}$, $\sum_0^n{}_k \tilde{\omega}_{ik} \cdot \omega_{kj} = \delta_{ij}$ $(i, j = 0, \ldots, n)$; dann ist $L_{\Omega^{-1}}(\mathfrak{y}) = \sum_0^n{}_k \tilde{\omega}_{0k} \cdot y_k = \left(\sum_0^n{}_{k,j} \tilde{\omega}_{0k} \cdot \omega_{kj} \cdot x_j\right) \cdot \left(\sum_0^n{}_k \omega_{0k} \cdot x_k\right)^{-1} = \left(L_\Omega(\mathfrak{x})\right)^{-1}$ $(x_0 = y_0 = 1)$.

b) Wegen $\Omega \notin G_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}}$ ist $\omega_{0k} \neq 0$ für ein $k \in \{1, \ldots, n\}$. Ist $\Gamma\mathfrak{x} = \left\langle x_1, \ldots, x_{k-1}, x_n, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}, \sum_0^n \omega_{0i} \cdot x_i \right\rangle$ $(\mathfrak{x} \in \mathfrak{X},\ x_0 = 1)$, so ist $L_\Omega = \gamma_{n0} + \gamma_{n1} X_1 + \cdots + \gamma_{nn} X_n$ und, wie man leicht nachrechnet, $\tilde{\Gamma} = \Omega \cdot \Gamma^{-1} \cdot \mathsf{T}^{-1} \in G_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}}$.

c) Es sei $\Omega = \tilde{\Gamma} \cdot \mathsf{T} \cdot \Gamma$ gemäß b), $\mathfrak{u} = \Gamma\mathfrak{x}$, $\mathfrak{v} = \mathsf{T}\mathfrak{u}$, $\mathfrak{y} = \tilde{\Gamma}\mathfrak{v}$. Dann ist $u_n = \sum_0^n{}_i \gamma_{ni} \cdot x_i = L_\Omega(\mathfrak{x})$, $D_{\mathfrak{x}}(\Omega\mathfrak{x}) = D_{\mathfrak{x}}\mathfrak{u} \cdot D_{\mathfrak{u}}\mathfrak{v} \cdot D_{\mathfrak{v}}\mathfrak{y} = \alpha \cdot D_{\mathfrak{u}}\mathfrak{v} = -\alpha \cdot u_n^{-(n+1)}$ für ein $\alpha \in \mathsf{K}^\cdot$.

Es sei $\mathfrak{x}$ eine Tr.-B. des a.F. nV. $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$; $\mathfrak{s}_\mathfrak{x}$ bezeichne die Menge aller Polynombewertungen $b_{\mathfrak{x},P}$ von $\mathsf{K}(\mathfrak{x})|\mathsf{K}$, $\mathfrak{S}_\mathfrak{x}$ das über $\mathfrak{s}_\mathfrak{x}$ liegende Bewertungssystem von $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$. Ersichtlich ist $\bigcap_{b\in\mathfrak{s}_\mathfrak{x}} \mathfrak{b} = \mathsf{K}[\mathfrak{x}]$, $\bigcap_{B\in\mathfrak{S}_\mathfrak{x}} \mathfrak{B} =$ Ring aller von $\mathsf{K}[\mathfrak{x}]$ ganzabhängigen Elemente $\in\mathfrak{K}$, und $\mathfrak{x}$ ist B-zulässig, genau wenn $B\in\mathfrak{S}_\mathfrak{x}$ ist.

Ferner sei $b_{\mathfrak{x},\infty}$ die durch $b_{\mathfrak{x},\infty}(F(\mathfrak{x})) = -\operatorname{Grad} F$ (F Polynom über K) definierte „Gradbewertung" von $\mathsf{K}(\mathfrak{x})|\mathsf{K}$, $\mathfrak{s}_{|\mathfrak{x}|} = \mathfrak{s}_\mathfrak{x} \cup \{b_{\mathfrak{x},\infty}\}$, $\mathfrak{S}_{|\mathfrak{x}|}$ das über $\mathfrak{s}_{|\mathfrak{x}|}$ liegende Bewertungssystem von $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ ($\mathfrak{S}_\mathfrak{x} - \mathfrak{S}_\mathfrak{x}$ ist endlich!). Jedem $b\in\mathfrak{s}_{|\mathfrak{x}|}$ wird als *natürlicher Grad (bezüglich* $\mathfrak{x}$) $\mathfrak{f}_{\mathfrak{x}'}(b)$ der Grad von P (für $b = b_{\mathfrak{x},P}$) bzw. 1 (für $b = b_{\mathfrak{x},\infty}$) zugeordnet; $\mathfrak{F}_{\mathfrak{x}'}(B) = g_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}(\mathfrak{x})}\cdot\mathfrak{f}_{|\mathfrak{x}'|}(b)$ heißt der *natürliche Grad (bezüglich* $\mathfrak{x}$) von $B\in\mathfrak{S}_{\mathfrak{x}'}$. $\mathfrak{s}_{\mathfrak{x}'}$ bzw. $\mathfrak{S}_{|\mathfrak{x}|}$ heißt das *zu* $\mathfrak{x}$ *gehörige projektive Bewertungssystem* von $\mathsf{K}(\mathfrak{x})|\mathsf{K}$ bzw. $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$, weil es invariant gegenüber $P_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}}$ ist, d.h. $\mathfrak{s}_{\Omega\mathfrak{x}} = \mathfrak{s}_{\mathfrak{x}'}$, $\mathfrak{S}_{|\Omega\mathfrak{x}'|} = \mathfrak{S}_{|\mathfrak{x}'|}$; dasselbe gilt auch für die natürlichen Grade: $\mathfrak{f}_{|\Omega\mathfrak{x}'|}(b) = \mathfrak{f}_{\mathfrak{x}'}(b)$, $\mathfrak{F}_{|\Omega\mathfrak{x}|}(B) = \mathfrak{F}_{\mathfrak{x}'}(B)$ $(b\in\mathfrak{s}_{|\mathfrak{x}|},\ B\in\mathfrak{S}_{|\mathfrak{x}|},\ \Omega\in P_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}})$.

Bekanntlich gilt[16]):

(6.2) Satz. *$\mathfrak{S}_{\mathfrak{x}'}$ ist eine unendliche Menge (aber nur für $n=1$ die Menge aller) maxdim. Bewertungen von $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ derart, daß*

a) $\bigcap_{B\in\mathfrak{S}_\mathfrak{x}} \mathfrak{B} = \mathsf{K}_\mathfrak{K}$ *ist;*

b) $\{B\in\mathfrak{S}_\mathfrak{x} \mid B(a)\neq 0\}$ *endlich ist für jedes* $a\in\mathfrak{K}$ *(„Endlichkeitsbedingung");*

c) $\sum_{B\in\mathfrak{S}_{|\mathfrak{x}|}} \mathfrak{F}_{|\mathfrak{x}|}(B)\cdot B(a) = 0$ *für jedes* $a\in\mathfrak{K}$ *gilt („Geschlossenheit");*

d) *jedes über einer echten Teilmenge von $\mathfrak{s}_{|\mathfrak{x}|}$ liegende Bewertungssystem unabhängig ist (z.B. $\mathfrak{S}_\mathfrak{x}$).*

Bezeichnet $\mathfrak{s}^{(i)}_{x_i}$ die Menge aller Polynombewertungen von $\mathsf{K}(\mathfrak{x})|\mathsf{K}(\mathfrak{x}^{(i)})$, so ist $\mathfrak{s}_\mathfrak{x} = \bigcup_{i=1\ldots n} \mathfrak{s}^{(i)}_{x_i}$ und damit $\mathfrak{S}_\mathfrak{x} = \bigcup_{i=1\ldots n} \mathfrak{S}^{(i)}_{x_i}$; daher sind die Bewertungssysteme $\mathfrak{S}_{|\mathfrak{x}|}$ und $\bigcup_{i=1\ldots n} \mathfrak{S}^{(i)}_{x_i}$ fast gleich, d.h. sie unterscheiden sich nur um endlich viele Bewertungen. Da $\mathfrak{S}^{(i)}_{|x_i|}$ gleich der Menge aller Bewertungen von $\mathfrak{K}|\mathsf{K}(\mathfrak{x}^{(i)})$ ist, lassen sich die für beliebige a.F.1V. gültigen Aussagen von der Form „für fast alle Bewertungen gilt ..." auf projektive Bewertungssysteme des a.F.nV. $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ übertragen, z.B. Ch. IV § 3, Lemma 3:

(6.3) *Ist $\mathfrak{L}|\mathfrak{K}$ endlich-algebraisch, so ist jede Basis von $\mathfrak{L}|\mathfrak{K}$ B-Ganzheitsbasis von $\mathfrak{L}|\mathfrak{K}$ für fast alle $B\in\mathfrak{S}_{|\mathfrak{x}|}$.*

Eine Abbildung $\mathfrak{A}$ von einem Bewertungssystem $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{K}|\mathsf{K}$ in die Menge der ganzen Zahlen heißt ein *$\mathfrak{S}$-Divisor*; insbesondere heißt $\mathfrak{A}$ *endlich* bzw. *ganz*, wenn $\{B\in\mathfrak{S}\mid\mathfrak{A}B\neq 0\}$ endlich bzw. für alle $B\in\mathfrak{S}$ $\mathfrak{A}B\geqq 0$ ist. Ist $\{0\}\subsetneqq M\subseteqq\mathfrak{K}\cup\boldsymbol{d}_{\mathfrak{K}|\mathsf{K}}$, so bezeichnet $\mathfrak{D}_\mathfrak{S}M$ den durch $(\mathfrak{D}_\mathfrak{S}M)\,B = \min\{B(a)\mid a\in M\}$ $(B\in\mathfrak{S})$ definierten *$\mathfrak{S}$-Divisor von M*. $\mathsf{M}\mathfrak{A} = \{a\in\mathfrak{K}\mid B(a)\geqq\mathfrak{A}B\ \ (B\in\mathfrak{S})\}$ heißt der *zu $\mathfrak{A}$ gehörige Modul*. Wir zeigen:

(6.4) Satz. *Für jeden endlichen $\mathfrak{S}_{|\mathfrak{x}|}$-Divisor $\mathfrak{A}$ ist $\mathsf{M}\mathfrak{A}$ ein endlicher K-Modul.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{A}_1$ bzw. $\mathfrak{A}_2$ der durch $\mathfrak{A}$ induzierte $(\mathfrak{S}_{|\mathfrak{x}} - \mathfrak{S}_\mathfrak{x})$- bzw. $\mathfrak{S}_\mathfrak{x}$-Divisor. Dann gibt es $c_1, c_2\in\mathsf{K}[\mathfrak{x}]$ derart, daß $c_1^{-1}\cdot\mathsf{M}\mathfrak{A}_1\subseteqq\mathfrak{J}_{\mathfrak{x},\infty}$ und

[16]) Der in Kr. § 6 nur für separierende $\mathfrak{x}$ geführte Beweis gilt für beliebige Tr.-B. $\mathfrak{x}$. [(2.4) b) gilt ohne Separabilitätsvoraussetzung!]

$c_2 \cdot \mathsf{M}\mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{J}_{\mathfrak{s}_\mathfrak{x}} = \bigcap_{b_\zeta \in \mathfrak{s}_\mathfrak{x}} \mathfrak{J}_\zeta$ ist. Es sei $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ eine $b_{\mathfrak{x},\infty}$-Ganzheitsbasis; dann gibt es wegen (2.4) c) und (6.3) ein $c_3 \in \mathsf{K}[\mathfrak{x}]$ derart, daß für jedes $y = \sum_1^k a_i v_i \in \mathfrak{J}_{\mathfrak{s}_\mathfrak{x}}$ $(a_i \in \mathsf{K}(\mathfrak{x}))$ gilt: $c_3 \cdot a_i \in \mathsf{K}[\mathfrak{x}]$ $(1 \leqq i \leqq k)$. Hieraus folgt, daß sich jedes $z \in \mathsf{M}\mathfrak{A} = \mathsf{M}\mathfrak{A}_1 \cap \mathsf{M}\mathfrak{A}_2$ als Summe $(c_3 \cdot c_2)^{-1} \cdot \sum_1^k D_i(\mathfrak{x}) v_i$ schreiben läßt, wobei Grad $D_i \leqq \sum_1^3 i$ Grad C_j $[1 \leqq i \leqq k,\ C_j(\mathfrak{x}) = c_j]$ ist, also ist $\mathsf{M}\mathfrak{A}$ in dem durch $\left\{(c_3 \cdot c_2)^{-1} \cdot x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n} \cdot v_i \mid i_1 + \cdots + i_n \leqq \sum_1^3 i \text{ Grad } C_j,\ 1 \leqq i \leqq k\right\}$ erzeugten endlichen K-Modul enthalten.

Im folgenden sei $\mathfrak{K} \mid \mathfrak{k}$ endlich-separabel, $[\mathfrak{K} : \mathfrak{k}] = k$, B bzw. b eine maxdim. Bewertung von $\mathfrak{K} \mid \mathsf{K}$ bzw. $\mathfrak{k} \mid \mathsf{K}$. In § 5 haben wir die B-Differente von $\mathfrak{K} \mid \mathfrak{k}$ definiert und für sie den „Exponenten-" und „Schachtelungssatz" [(5.1), (5.2)] bewiesen. Ähnliche Sätze [17]) gelten für die *b-Diskriminante* von $\mathfrak{K} \mid \mathfrak{k}$: $\mathrm{disk}_{\mathfrak{K}|\mathfrak{k}} b = \sum_1^r g^{(i)} \cdot \mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathfrak{k}} B^{(i)}$ $(\geqq 0)$, die mit der üblichen Diskriminante $\Delta_{\mathfrak{K}|\mathfrak{k}}(v_1, \ldots, v_k) = |\mathrm{Sp}_{\mathfrak{K}|\mathfrak{k}} v_i \cdot v_j|_{1 \ldots k}$ auf folgende Weise zusammenhängt (CH. IV § 8, Lemma 2):

(6.5) $\mathrm{disk}_{\mathfrak{K}|\mathfrak{k}} b \leqq b\left(\Delta_{\mathfrak{K}|\mathfrak{k}}(v_1, \ldots, v_k)\right)$ $(v_1, \ldots, v_k \in \mathfrak{J} = \mathfrak{B}^{(1)} \cap \ldots \cap \mathfrak{B}^{(r)})$; *das Gleichheitszeichen gilt, genau wenn* $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ *eine b-Ganzheitsbasis von* $\mathfrak{K} \mid \mathfrak{k}$ *ist.*

Für ein Bewertungssystem $\mathfrak{s}$ von $\mathfrak{k} \mid \mathsf{K}$ bzw. $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{K} \mid \mathsf{K}$ bezeichnen wir als $\mathfrak{s}$-*Diskriminante* bzw. $\mathfrak{S}$-*Differente* von $\mathfrak{K} \mid \mathfrak{k}$ den durch $\mathrm{disk}_{\mathfrak{K}|\mathfrak{k};\mathfrak{s}} b = \mathrm{disk}_{\mathfrak{K}|\mathfrak{k}} b$ $(b \in \mathfrak{s})$ bzw. $\mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathfrak{k};\mathfrak{S}} B = \mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathfrak{k}} B$ $(B \in \mathfrak{S})$ definierten ganzen $\mathfrak{s}$- bzw. $\mathfrak{S}$-Divisor $\mathrm{disk}_{\mathfrak{K}|\mathfrak{k};\mathfrak{s}}$ bzw. $\mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathfrak{k};\mathfrak{S}}$.

(6.6) $\mathfrak{s}$ *sei unabhängig und genüge der Endlichkeitsbedingung,* $\mathfrak{S}$ *sei das über* $\mathfrak{s}$ *liegende Bewertungssystem; dann gilt:*

a) $\mathrm{disk}_{\mathfrak{K}|\mathfrak{k};\mathfrak{s}} = \mathfrak{d}_\mathfrak{s}\{\Delta_{\mathfrak{K}|\mathfrak{k}}(v_1, \ldots, v_k) \mid \langle v_1, \ldots, v_k \rangle \text{ aus } \mathfrak{J}_\mathfrak{s}\}$ $\quad (\mathfrak{J}_\mathfrak{s} = \bigcap_{b_\zeta \in \mathfrak{s}} \mathfrak{J}_\zeta)$.

b) $\mathrm{disk}_{\mathfrak{K}|\mathfrak{k};\mathfrak{s}}$ *und* $\mathrm{Diff}_{\mathfrak{K}|\mathfrak{k};\mathfrak{S}}$ *sind endlich.*

c) *Fast alle* $B \in \mathfrak{S}$ *sind separabel und unverzweigt bezüglich* $\mathfrak{k}$.

Beweis. a) Wegen (6.5) genügt es zu zeigen, daß zu jedem $b \in \mathfrak{s}$ eine b-Ganzheitsbasis von $\mathfrak{K} \mid \mathfrak{k}$ aus $\mathfrak{J}_\mathfrak{s}$ existiert. — Aus (2.4) a) folgt leicht, daß mit $\mathfrak{s}$ auch $\mathfrak{S}$ der Endlichkeitsbedingung genügt, also ist jede b-Ganzheitsbasis $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ für fast alle $B_\zeta \in \mathfrak{S}$ ein k-Tupel aus $\mathfrak{B}_\zeta$, insbesondere für $B^{(1)}, \ldots, B^{(r)}$. Wegen der Unabhängigkeit von $\mathfrak{s}$ ist für eine geeignete Einheit c von $\mathfrak{d}$ $\langle c \cdot v_1, \ldots, c \cdot v_k \rangle$ aus $\mathfrak{J}_\mathfrak{s} = \bigcap_{B_\zeta \in \mathfrak{S}} \mathfrak{B}_\zeta$ und wegen $\Delta_{\mathfrak{K}|\mathfrak{k}}(c \cdot v_1, \ldots, c \cdot v_k) = c^{2k} \cdot \Delta_{\mathfrak{K}|k}(v_1, \ldots, v_k)$ nach (6.5) ebenfalls eine b-Ganzheitsbasis.

b) folgt aus a), der Endlichkeitsbedingung und der Ganzheit der Differente.

c) folgt aus b) und (5.1) b).

Ist $\mathfrak{x}$ eine Tr.-B. von $\mathfrak{k} \mid \mathsf{K}$, so erfüllen die über dem Bewertungssystem $\mathfrak{s}_\mathfrak{x}$ (von $\mathsf{K}(\mathfrak{x}) \mid \mathsf{K}$) liegenden Bewertungssysteme $\mathfrak{s}_{\mathfrak{x};\mathfrak{k}}$ (von $\mathfrak{k} \mid \mathsf{K}$) und $\mathfrak{S}_\mathfrak{x}$ (von $\mathfrak{K} \mid \mathsf{K}$) die Voraussetzungen von (6.6) (für $\mathfrak{s}$ bzw. $\mathfrak{S}$). Aus der Endlichkeit von $\mathfrak{S}_{|\mathfrak{x}|} - \mathfrak{S}_\mathfrak{x}$ folgt damit der

[17]) Vgl. H. HASSE: Zahlentheorie, S. 322. Berlin: Akademieverlag 1949.

(6.6*) Zusatz. (6.6) b) *und* c) *gelten auch für* $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_{|\mathfrak{x}|;\mathfrak{k}}$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{|\mathfrak{x}|}$ ($\mathfrak{x}$ *Tr.-B. von* $\mathfrak{k}|\mathsf{K}$).

Mit Hilfe von (6.6*) werden wir zeigen, daß im Falle eines vollkommenen Koeffizientenkörpers K zwei (zu separierenden n-Tupeln gehörige) projektive Bewertungssysteme fast gleich sind. Zunächst lassen wir jedoch beliebiges K zu und definieren: es sei ${}^0\mathfrak{s}_{\mathfrak{x}} = \{b_{\mathfrak{x},P} \in \mathfrak{s}_{\mathfrak{x}} \mid P \text{ separabel}(i) \text{ für ein } i\}$, ${}^0\mathfrak{S}_{\mathfrak{x}}$ das über ${}^0\mathfrak{s}_{\mathfrak{x}}$ liegende Bewertungssystem von $\mathfrak{R}|\mathsf{K}$ ($= \mathfrak{s}_{\mathfrak{x}}$ bzw. $\mathfrak{S}_{\mathfrak{x}}$, falls K vollkommen ist). Aus (2.2) und (5.1) b) folgt unmittelbar:

(6.7) a) $\mathfrak{x}$ *ist B-regulär, genau wenn* $B \in {}^0\mathfrak{S}_{\mathfrak{x}}$ *und B separabel bezüglich* $\mathsf{K}(\mathfrak{x})$ *ist.*

b) $\mathfrak{x}$ *ist B-regulär und B unverzweigt bezüglich* $\mathsf{K}(\mathfrak{x})$, *genau wenn* $B \in {}^0\mathfrak{S}_{\mathfrak{x}}$ *und* $\mathrm{Diff}_{\mathfrak{R}|\mathsf{K}(\mathfrak{x})} B = 0$ *ist.*

Das Bewertungssystem ${}^0\mathfrak{s}_{\mathfrak{x}} \cup \{b_{\mathfrak{x},\infty}\}$ bzw. das darüberliegende von $\mathfrak{R}|\mathsf{K}$ ($= \mathfrak{s}_{|\mathfrak{x}|}$ bzw. $= \mathfrak{S}_{\mathfrak{x}}$ für vollkommenes K!) können wir mit ${}^0\mathfrak{s}_{|\mathfrak{x}|}$ bzw. ${}^0\mathfrak{S}_{|\mathfrak{x}|}$ bezeichnen, denn auch

(6.8) ${}^0\mathfrak{s}_{\mathfrak{x}} \cup \{b_{\mathfrak{x},\infty}\}$ *ist invariant bezüglich* $P_{\mathfrak{R}|\mathsf{K}}$.

Beweis. Es sei $\Omega \in P_{\mathfrak{R}|\mathsf{K}}$. Ist $b \in {}^0\mathfrak{s}_{\mathfrak{x}}$, so ist $b = b_{\Omega\mathfrak{x},\infty}$ oder $\in \mathfrak{s}_{\Omega\mathfrak{x}}$. Im letzteren Falle ist nach (6.1) $L_{\Omega}(\mathfrak{x})$ und damit $D_{\mathfrak{x}}(\Omega\mathfrak{x})$ eine Einheit in $\mathfrak{b}$, also ist mit $\mathfrak{x}$ auch $\Omega\mathfrak{x}$ b-regulär und b-uniformisierend [(6.7) a), (3.4), (3.1)!] und damit $b \in {}^0\mathfrak{s}_{\Omega\mathfrak{x}}$. Wegen $\mathfrak{f}_{|\mathfrak{x}|}(b_{\mathfrak{x},\infty}) = 1$ ist auch $b_{\mathfrak{x},\infty} \in {}^0\mathfrak{s}_{\Omega\mathfrak{x}} \cup \{b_{\Omega\mathfrak{x},\infty}\}$.

(6.9) Satz. *Es seien* $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ *separierend im a.F.nV.* $\mathfrak{R}|\mathsf{K}$; *dann gilt:*

a) *Ist* $B \in {}^0\mathfrak{S}_{\mathfrak{x}}$, $\mathrm{Diff}_{\mathfrak{R}|\mathsf{K}(\mathfrak{x})} B = 0$, $\mathfrak{y}$ *aus* $\mathfrak{B}$ *und* $B(D_{\mathfrak{x}}\mathfrak{y}) = 0$, *so ist* $B \in {}^0\mathfrak{S}_{\mathfrak{y}}$ *und* $\mathrm{Diff}_{\mathfrak{R}|\mathsf{K}(\mathfrak{y})} B = 0$.

b) ${}^0\mathfrak{S}_{|\mathfrak{x}|}$ *und* ${}^0\mathfrak{S}_{|\mathfrak{y}|}$ *sind fast gleich.*

Beweis. a) Nach (6.7) b) und (3.4) ist B unverzweigt bezüglich $\mathsf{K}(\mathfrak{x})$, $\mathfrak{x}$ B-regulär und B-uniformisierend, und nach (3.1) gilt dasselbe für $\mathfrak{y}$; also folgt a) aus (6.7) b).

b) Wegen (6.6*) und der Endlichkeitsbedingung für ${}^0\mathfrak{S}_{\mathfrak{x}}$ erfüllen fast alle $B \in {}^0\mathfrak{S}_{\mathfrak{x}}$ die Voraussetzungen von a), also sind, da ${}^0\mathfrak{S}_{|\mathfrak{x}|} - {}^0\mathfrak{S}_{\mathfrak{x}}$ endlich ist, fast alle $B \in {}^0\mathfrak{S}_{|\mathfrak{x}|}$ in ${}^0\mathfrak{S}_{|\mathfrak{y}|}$ enthalten.

Als Ergänzung zu § 5 erwähnen wir noch: Ist $B \in (\mathfrak{S}_{|\mathfrak{x}} - \mathfrak{S}_{\mathfrak{x}}) \cap \mathfrak{S}_{\Omega\mathfrak{x}}$ (für ein $\Omega \in P_{\mathfrak{R}|\mathsf{K}}$), so ist wegen (6.1) c) $B(d\mathfrak{x}) = B(d\Omega_{\mathfrak{x}}) - (n+1) \cdot e_{\mathfrak{x},\infty}$. Da nach (6.6*) und (6.7) a) $\mathfrak{x}$ B-regulär für fast alle $B \in {}^0\mathfrak{S}_{|\mathfrak{x}|}$ ist, stimmen wegen (5.7) und (5.9) die Divisoren $\mathfrak{D}_{\mathfrak{S}_{\mathfrak{x}}}\{d\mathfrak{x}\}$ und $\mathrm{Diff}_{\mathfrak{R}|\mathsf{K}(\mathfrak{x});\,\mathfrak{S}_{|\mathfrak{x}}} \cdot (\mathrm{Con}_{\mathfrak{R}|\mathsf{K}(\mathfrak{x})} \mathfrak{p}_{\mathfrak{x},\infty})^{-(n+1)}$ [18]) für fast alle $B \in {}^0\mathfrak{S}_{|\mathfrak{x}|}$ ($= \mathfrak{S}_{|\mathfrak{x}|}$, falls K vollkommen) überein; im Falle $Ch(\mathsf{K}) = 0$ sind sie sogar gleich.

[18]) $\mathfrak{p}_{\mathfrak{x},\infty}$ bezeichnet den zu $b_{\mathfrak{x},\infty}$ gehörigen Primdivisor von $\mathfrak{s}_{|\mathfrak{x}|}$, $(\mathrm{Con}_{\mathfrak{R}|\mathfrak{k}}\mathfrak{a})\,B = e_{\mathfrak{R}|\mathfrak{k}} \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ (vgl. Ch. IV § 7). Multiplikation der Divisoren wie üblich.

Mathematisches Institut der Universität Bonn

(Eingegangen am 8. Dezember 1956)

Schauffler, R.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 428—435 (1957)

Die Assoziativität im Ganzen, besonders bei Quasigruppen

Von

Rudolf Schauffler

1. M sei die nicht leere endliche Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$. In M sei eine geordnete Menge Ω von zweistelligen Operationen in Gestalt von Verknüpfungstafeln gegeben. Eine Tafel $T \in \Omega$ ordnet jedem geordneten Paar $x, y \in M$ ein Bildelement $x\,T\,y$ aus M zu[1]). Wir denken uns die Tafeln in der Normalform gegeben, die aus einer quadratischen Matrix für die Variable $x\,T\,y$ mit einer Außenspalte (links) für x und einer Außenzeile (oben) für y besteht, wobei die Außenreihen die Zahlen in der natürlichen Reihenfolge enthalten (siehe z. B. Bild 1).

Wir bezeichnen die Tafel $\overline{T}$, die aus T durch Spiegelung an der Hauptdiagonale hervorgeht (so daß $x\,T\,y = y\,\overline{T}\,x$ für $x, y \in M$), als die zu T *transponierte* Tafel; diese Beziehung zwischen T und $\overline{T}$ ist symmetrisch. Wir nennen Ω *im Ganzen kommutativ*, wenn es zu jeder Tafel $T \in \Omega$ eine transponierte $\overline{T} \in \Omega$ gibt.

Wir nennen zwei geordnete Tafelpaare $T_1\,T_2$ und $T_1'\,T_2'$ *links* bzw. *rechts konjugiert*, wenn $(x\,T_1\,y)\,T_2\,z = (x\,T_1'\,y)\,T_2'\,z$ bzw. $x\,T_1\,(y\,T_2\,z) = x\,T_1'\,(y\,T_2'\,z)$ für $x, y, z \in M$. Beide Beziehungen sind symmetrisch und transitiv, führen also zu einer Einteilung der Tafelpaare in Klassen, die wir kurz *Linksklassen* und *Rechtsklassen* nennen wollen.

Wenn es zu $T_1\,T_2$ ein Paar $\widetilde{T}_1\,\widetilde{T}_2$ gibt, so daß $(x\,T_1\,y)\,T_2\,z = (z\,\widetilde{T}_1\,y)\,\widetilde{T}_2\,x$ für $x, y, z \in M$, so heiße $\widetilde{T}_1\,\widetilde{T}_2$ *links invers* zu $T_1\,T_2$; analog wird „*rechts invers*" definiert. Beide Beziehungen sind symmetrisch. Wir nennen Ω *im Ganzen invertierbar*, wenn es in Ω zu jedem Tafelpaar mindestens ein links und ein rechts inverses gibt.

Wenn $(x\,T_1\,y)\,T_2\,z = x\,T_1^*\,(y\,T_2^*\,z)$ für $x, y, z \in M$, so nennen wir $T_1^*\,T_2^*$ *rechts assoziiert* zu $T_1\,T_2$, $T_1\,T_2$ *links assoziiert* zu $T_1^*\,T_2^*$. Dementsprechend reden wir auch von rechts oder links assoziierten Tafelpaarklassen. Ist ein Tafelpaar zu einem anderen (eventuell mit ihm identischen) rechts und links assoziiert, so nennen wir die beiden Paare zueinander *assoziiert*; diese Beziehung ist symmetrisch. Ein zu sich selbst assoziiertes Tafelpaar heißt *assoziativ*. Wir nennen Ω *im Ganzen assoziativ*, wenn es in Ω zu jedem Tafelpaar $T_1\,T_2$ mindestens ein rechts assoziiertes $T_1^*\,T_2^*$ und ein links assoziiertes ${}^*T_1\,{}^*T_2$ gibt.

[1]) Ω ist also eine Algebra vom Typ $\langle 2, 2, \ldots, 2 \rangle$ im Sinne von H. Hermes, Verbandstheorie (1955), S. 153.

Wenn Ω i. G. kommutativ und invertierbar ist, so gilt:

$$(x\,T_1\,y)\,T_2\,z = z\,\overline{T}_2\,(y\,\overline{T}_1\,x) = x\,\widetilde{T}_2\,(y\,\widetilde{T}_1\,z),$$

$$x\,T_1(y\,T_2\,z) = (z\,\overline{T}_2\,y)\,\overline{T}_1\,x = (x\,\widetilde{\overline{T}}_2\,y)\,\widetilde{\overline{T}}_1\,z \qquad \text{für } x, y, z \in M,$$

d.h. Ω ist i. G. assoziativ. Wenn Ω i. G. kommutativ und assoziativ ist, so gilt:

$$(x\,T_1\,y)\,T_2\,z = x\,T_1^*(y\,T_2^*\,z) = (z\,\overline{T_2^*}\,y)\,\overline{T_1^*}\,x,$$

$$x\,T_1(y\,T_2\,z) = (x\,{}^*T_1\,y)\,{}^*T_2\,z = z\,\overline{{}^*T_2}\,(y\,\overline{{}^*T_1}\,x),$$

d.h. Ω ist i. G. invertierbar. Also gilt:

Satz 1. *Ist Ω i. G. kommutativ, so ist Ω genau dann i. G. assoziativ, wenn es i. G. invertierbar ist.*

Bei festem $T_1\,T_2$ verwenden wir die Bezeichnungen $s_{xyz} = (x\,T_1\,y)\,T_2\,z$, $s^*_{xyz} = x\,T_1(y\,T_2\,z)$. Die lexikographisch geordnete Elementenfolge $s_{111}, s_{112}, \ldots, s_{nnn}$ heiße das *linke Wertsystem* zu $T_1\,T_2$, die Folge $s^*_{111}, \ldots, s^*_{nnn}$ das *rechte Wertsystem* zu $T_1\,T_2$. Ω ist genau dann i. G. assoziativ, wenn die Menge der rechten Wertsysteme gleich der Menge der linken Wertsysteme ist.

Beim Rechnen mit einer einzelnen assoziativen Verknüpfungstafel kann man bekanntlich jeden Klammerausdruck auf eine Normalform bringen, an deren Anfang alle „Klammer auf"-Zeichen vereinigt sind. Dasselbe gilt nun auch für eine i. G. assoziative Operationenmenge Ω. So erhält man z. B. aus

$$x_4\,T_1\big((x_1\,T_2\,x_3)\,T_3\,(x_2\,T_4\,x_5)\big) \tag{1}$$

nach drei Umformungsschritten als erste Normalform:

$$\big(((x_4\,U_1\,x_1)\,U_2\,x_3)\,U_3\,x_2\big)\,U_4\,x_5 \tag{2}$$

mit geeigneten $U_i \in \Omega$. Ist Ω auch noch i. G. kommutativ, so kann man beim Umformen auch vom kommutativen Gesetz und wegen Satz 2 von der Invertierbarkeit Gebrauch machen und zu einer zweiten Normalform gelangen, in der die x_i in der normalen Reihenfolge der Indizes stehen. Man erhält so aus (1) die zweite Normalform:

$$\big(((x_1\,V_1\,x_2)\,V_2\,x_3)\,V_3\,x_4\big)\,V_4\,x_5 \tag{3}$$

mit geeigneten $V_i \in \Omega$.

Auch Klammerausdrücke mit einer einzigen, nicht assoziativen Verknüpfungstafel lassen sich auf diese Art in die erste (und zweite) Normalform bringen, wenn man in Kauf nimmt, daß in der Normalform mehrere verschiedene Verknüpfungstafeln auftreten; Voraussetzung ist dabei, daß man ein i. G. assoziatives (und kommutatives) Ω kennt, das die gegebene Tafel enthält.

2. Wenn die quadratische Matrix der Verknüpfungstafel ein lateinisches Quadrat ist, d.h. in jeder Zeile und Spalte jedes Element genau einmal vorkommt, so heißt M im Verein mit der Verknüpfung eine *Quasigruppe n-ter Ordnung*. Eine Verknüpfung ist auch dadurch als Quasigruppe charakterisiert, daß jede der Gleichungen $aTx=b$ und $yTa=b$ genau eine Lösung in M besitzt, wenn $a, b \in M$. Die Menge der Quasigruppen mit den Elementen $1, 2, \ldots, n$ werde mit Ω_n bezeichnet. Man erkennt leicht, daß Ω_n i.G. kommutativ ist.

Wie steht es aber bei Quasigruppen mit der Assoziativität i.G.? Diese Frage ist auch von einer gewissen praktischen Bedeutung: Will man für einen Telegraphencode einen Vorrat von *Codewörtern* herstellen, so empfiehlt es sich, die Codewörter, die beispielsweise Buchstaben-Quintupel sind, so zu gestalten, daß sie *bidifferent* werden, d.h. sich je zwei von ihnen an mindestens zwei der fünf Stellen unterscheiden. In diesem Fall und ganz allgemein, wenn man eine Menge von Gegenständen mit bidifferenten Nummern versehen will, kann man den Zweck erreichen, indem man einen Quasigruppen-Klammerausdruck — z.B. von der Form (1) — einer Konstanten gleichsetzt. Als Elemente kann man Buchstaben oder Ziffern wählen. Die Gesamtheit der Lösungsquintupel dieser Gleichung ist dann der Codewortschatz oder das Nummernsystem[2]). Falls nun die Gesamtheit der Quasigruppen der betreffenden Ordnung i.G. assoziativ ist, erhält man, da Ω_n i.G. kommutativ ist, schon bei Beschränkung auf die Klammerausdrücke der zweiten Normalform alle Codewortschätze oder Nummernsysteme dieser Art. — Leider erweist sich diese Möglichkeit als sehr beschränkt; denn wir werden zeigen:

Satz 2. *Ω_n ist dann und nur dann i.G. assoziativ, wenn $n \leqq 3$ ist.*

Beweis. Der Fall $n=1$ ist trivial.

Im Falle $n=2$ gibt es die beiden Tafeln

$$(D_1)\ \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{array} \quad \text{und} \quad (D_2)\ \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}$$

und die beiden Tafelpaarklassen D_1D_1, D_2D_2 und D_1D_2, D_2D_1, deren jede zugleich Rechts- und Linksklasse und zu sich selbst assoziiert ist; die erste ergibt als linkes und rechtes Wertsystem: 12212112, die zweite 21121221.

Im Falle $n=3$ haben wir es mit zwei Typen von Tafeln zu tun: Typ 1, vertreten durch Tafel A_1, und Typ 2, vertreten durch Tafel A_2 von Bild 1.

$$(A_1)\ \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{array} \qquad (A_2)\ \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{array}$$

Bild 1

[2]) SCHAUFFLER, R.: Über die Bildung von Codewörtern. Arch. elektr. Übertragung **10**, 303—314 (1956).

Man erhält alle Tafeln von Typ 1 (Typ 2), indem man auf die Ziffern der quadratischen Matrix von A_1 (A_2) die 6 Permutationen der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_3$ anwendet, aber die Außenreihen unverändert läßt. Typ 1 ist durch $1T2=2T1$, Typ 2 durch $1T2\neq 2T1$ charakterisiert.

Es wird sich später als zweckmäßig erweisen, wenn wir für die 12 Tafeln folgende dreistellige Numerierung einführen: Wir numerieren die Permutationen von $\mathfrak{S}_3$ durch Zahlenpaare (s. Bild 2) und numerieren jede Tafel vom Typ 1 bzw. 2, indem wir an die Ziffer 1 bzw. 2 die Nummer der betreffenden Permutation anhängen. Wir erhalten so 12 Tafelnummern ijk ($i,j=1,2$; $k=1,2,3$). A_1 und A_2 erhalten so die Nummern 111 bzw. 211. Nur 111, 112, 113 sind Gruppentafeln. Die Paare 211, 221; 212, 222 und 213, 223 sind Paare transponierter Tafeln; die übrigen 6 Tafeln (es sind die Tafeln $1jk$) sind zu sich selbst transponiert.

ν	1	2	3	Nr.
	1	2	3	11
	2	3	1	12
$p(\nu)$	3	1	2	13
	1	2	3	21
	2	1	3	22
	3	2	1	23

Bild 2

Man gelangt nun wie bei $n=2$ am raschesten zum Nachweis der Assoziativität i. G., wenn man die Wertsysteme effektiv berechnet. Dabei genügt es aber, von jedem Wertsystem nur so viele von den 27 Werten zu berechnen, daß man bei je zwei Wertsystemen entscheiden kann, ob sie gleich oder verschieden sind.

Wir wollen zeigen: Bei $n=3$ ist jedes linke Wertsystem durch das Wertequadrupel $s_1=s_{111}$, $s_2=s_{112}$, $s_3=s_{121}$, $s_4=s_{211}$ und jedes rechte durch $s_1^*=s_{111}^*$, …, $s_4^*=s_{211}^*$ eindeutig bestimmt. Zum Beweis benützen wir den Umstand, daß ein lateinisches Quadrat 3. Ordnung durch drei seiner Elemente bestimmt ist, von welchen zwei in einer Zeile und zwei in einer Spalte stehen. Es ist leicht zu sehen, daß die fünf Matrizen $S_1=(s_{1yz})$, $S_2=(s_{x1z})$, $S_3=(s_{xy1})$, $S_4=(s_{2yz})$, $S_5=(s_{3yz})$ $(x,y,z=1,2,3)$ lateinische Quadrate sind. In S_1 werden durch s_{111}, s_{112} und s_{121} 6 weitere Werte bestimmt; in S_2 sind dann die 4 Werte s_{111}, s_{112}, s_{113}, s_{211} bekannt, wodurch 5 neue Werte bestimmt werden. Aus S_3, S_4 und S_5 ergeben sich noch je 4 Werte, so daß nun alle 27 Werte bestimmt sind. Derselbe Beweis gilt auch für die rechten Wertsysteme.

Ich habe nun für die 12^2 Tafelpaare die Wertequadrupel berechnet und festgestellt: Es gibt 24 verschiedene Quadrupel $s_1s_2s_3s_4$; zu jedem Quadrupel gehört eine Linksklasse und eine Rechtsklasse von je 6 Tafelpaaren. Damit ist erwiesen, daß Ω_3 i. G. assoziativ ist.

3. Ich will nun den Beweis von Satz 2 unterbrechen, um einige der Gesetzmäßigkeiten der Algebra Ω_3 mitzuteilen, die sich bei dieser Gelegenheit erkennen ließen. Dabei erweist es sich als zweckmäßig, auch für die Wertequadrupel gewisse dreistellige Nummern einzuführen.

Die 24 Quadrupel zerfallen in vier Typen:

Typ Nummer	1,	2,	3,	4,
vertreten durch	1222,	1233,	1223,	1232.

Man erhält die 6 Quadrupel jeden Typs, indem man auf die Ziffern des hier angegebenen Vertreters die 6 Permutationen von $\mathfrak{S}_3$ anwendet. Wir numerieren die 6 Quadrupel jeden Typs, indem wir an die Nummer des Typs die Nummer der betreffenden Permutationen aus Bild 2 anhängen. So erhalten wir für jedes Quadrupel (und damit auch für jedes Wertsystem) eine Nummer der Form uvw $(u=1, 2, 3, 4;\ v=1, 2;\ w=1, 2, 3)$.

Wir vermerken für später, daß zu jedem Quadrupel $uvw = s_1 s_2 s_3 s_4$ auch das Quadrupel $\tilde{u}\tilde{v}\tilde{w} = s_1 s_4 s_3 s_2$ vorhanden ist, was auch aus Satz 1 folgt. Man erhält

$$(4)\quad \begin{cases} \text{für } u=1 \text{ und } u=4, \text{ d.h. } s_2 = s_4\colon\ \tilde{u}\tilde{v}\tilde{w} = uvw; \\ \text{für } u=2 \text{ und } u=3, \text{ d.h. } s_2 \neq s_4\colon\ \tilde{u} = 5-u,\ \tilde{v} \equiv v+1 \pmod 2,\ \tilde{w} = w. \end{cases}$$

$T_2 = i_2 j_2 k_2$

$T_1 = i_1 j_1 k_1$ \ uvw	111	112	113	121	122	123	211	212	213	221	222	223
111	111	2	3	121	2	3	211	2	3	221	2	3
112	2	3	1	3	1	2	3	1	2	2	3	1
113	3	1	2	2	3	1	2	3	1	3	1	2
121	211	2	3	221	2	3	111	2	3	121	2	3
122	2	3	1	3	1	2	3	1	2	2	3	1
123	3	1	2	2	3	1	2	3	1	3	1	2
211	311	2	3	321	2	3	411	2	3	421	2	3
212	2	3	1	3	1	2	3	1	2	2	3	1
213	3	1	2	2	3	1	2	3	1	3	1	2
221	411	2	3	421	2	3	311	2	3	321	2	3
222	2	3	1	3	1	2	3	1	2	2	3	1
223	3	1	2	2	3	1	2	3	1	3	1	2

Bild 3

Bild 3 zeigt die errechnete Tabelle, die jedem Tafelpaar sein linkes Wertsystem zuordnet. Sie ergibt z.B. zu $T_1\, T_2 = 211\ 121$ bzw. $212\ 123$ das linke Wertsystem 321 bzw. 322.

Bild 4

$i_1 j_1$ \ u	i_2: 1	2
11	1	2
12	2	1
21	3	4
22	4	3

j_2	v
1	1
2	2

k_1 \ w	k_2: 1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

für $i_2 + j_2 \equiv 0$

k_1 \ w	k_2: 1	2	3
1	1	2	3
2	3	1	2
3	2	3	1

für $i_2 + j_2 \equiv 1 \pmod 2$

Bild 3 läßt sich auf Bild 4 reduzieren und alsdann durch folgende Formeln ersetzen:

$$(5)\quad \begin{cases} u = 2i_1 - \tfrac{1}{2}\left(1 + (-1)^{i_1+i_2}\right), \qquad v = j_2, \\ w = k_1 A_v k_2 \text{ mit } v \equiv i_2 + j_2 - 1 \pmod 2 \quad \text{(wegen } A_v \text{ s. Bild 1)} \\ \text{oder } w \equiv (k_1 - 1)(-1)^{i_2+j_2} + k_2 \pmod 3. \end{cases}$$

Aus (5) oder Bild 3 läßt sich Folgendes herleiten: Zwei Tafelpaare $i_1 j_1 k_1$ $i_2 j_2 k_2$ und $i_1' j_1' k_1'$ $i_2' j_2' k_2'$ sind genau dann links konjugiert, wenn

$$(6) \qquad \begin{cases} i_1' = i_1, \quad i_2' - i_2 \equiv j_1' - j_1 \pmod 2, \quad j_2' = j_2, \\ k_2' - k_2 \equiv (k_1 - 1)(-1)^{i_2 + j_2} - (k_1' - 1)(-1)^{i_2' + j_2'} \pmod 3. \end{cases}$$

Um nach (6) zu dem Tafelpaar $i_1 j_1 k_1$ $i_2 j_2 k_2$ ein links konjugiertes zu erhalten, wählt man j_1' und k_1' beliebig und erhält dann aus (6) die Elemente i_1', i_2', j_2', k_2'; so ergibt sich eine Linksklasse von 2.3 Tafelpaaren (Beispiel: Bild 5a und c).

Bild 5

1233				1332			
111	211	121	221	211	121	221	111
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
121	111	211	211	221	221	111	121
2	3	3	2	2	3	3	2
3	2	2	3	3	2	2	3
a		b		c		d	

Nun werde gezeigt, wie man zu einer Linksklasse die rechts assoziierte Klasse ermittelt. Da Ω_3 i. G. kommutativ, assoziativ und invertierbar ist, folgt für $T_1, T_2 \in \Omega_3$:

$$(x\, T_1\, y)\, T_2\, z = x\, T_1^*\, (y\, T_2^*\, z),$$

$$(x\, T_1\, y)\, T_2\, z = (z\, \tilde{T}_1\, y)\, \tilde{T}_2\, x,$$

also

$$x\, T_1^*\, (y\, T_2^*\, z) = (z\, \tilde{T}_1\, y)\, \tilde{T}_2\, x = x\, \bar{\bar{T}}_2\, (y\, \bar{\bar{T}}_1\, z) \qquad \text{für } x, y, z \in M;$$

d.h. man erhält zu der zum Quadrupel $s_1 s_2 s_3 s_4$ gehörigen Linksklasse die rechts assoziierte Rechtsklasse, indem man mit Hilfe von (4) und Bild 3 die Tafelpaare der Linksklasse zu $s_1 s_4 s_3 s_2$ ermittelt, die beiden Tafeln jedes Paares vertauscht und jede Tafel durch die transponierte ersetzt.

Beispiel. Bild 5 zeigt die Linksklasse a bzw. c und die Rechtsklasse b bzw. d zu Quadrupel 1233 (Nummer 211) bzw. 1332 (321).

In jeder Linksklasse gibt es ein Tafelpaar $T_{01}\, T_{02} = i_{01} 11\; i_{02} j_{02} k_{02}$; die Linksklasse ist durch das Paar $i_{01}\, T_{02}$ oder das Quadrupel $i_{01}, 1\, T_{02} 1, 1\, T_{02} 2, 2\, T_{02} 1$ eindeutig bestimmt und es besteht die merkwürdige Beziehung:

$$(7) \qquad \begin{cases} s_1 = 1\, T_{02} 1, \; s_2 = 1\, T_{02} 2, \; s_3 = 2\, T_{02} 1, \\ s_4 = \begin{cases} s_3 & \text{für } i_{01} = 1, \\ 6 - s_1 - s_3 & \text{für } i_{01} = 2. \end{cases} \end{cases}$$

Beispiel. Die Tafelpaare 111 211 bzw. 211 121 in Bild 5a bzw. c (Tafel 211 ist A_2 von Bild 1).

Wählt man für die Menge der Gruppen n-ter Ordnung mit Elementen aus M die Bezeichnung Γ_n, so zeigt es sich, daß $\Gamma_3 = \{111, 112, 113\}$ i. G. assoziativ

ist; es ist sogar jedes Tafelpaar aus Γ_3 assoziativ. Eine andere i. G. assoziative Teilmenge von Ω_3 ist z.B. $\{111, 121, 211, 221\}$.

4. Nach diesem Exkurs kehren wir zum Beweis von Satz 2 zurück. Wir betrachten die Gleichung

$$(x_1 T_1 x_3) T_2 x_2 = x_4 \tag{8}$$

und weisen nach, daß bei $n \geqq 4$ und passend gewähltem $T_1 T_2$ die Lösungsgesamtheit dieser Gleichung eine Struktureigenschaft hat, die bei einem i. G. assoziativen Ω_n nicht möglich ist.

Wenn Ω_n i. G. assoziativ wäre, so ließe sich (8) wie folgt umformen:

$$x_1 U_1 (x_3 U_2 x_2) = x_4, \quad x_1 U_1 (x_2 \overline{U}_2 x_3) = x_4, \quad (x_1 V_1 x_2) V_2 x_3 = x_4,$$
$$x_1 V_1 x_2 = f(x_3, x_4),$$

wobei $f(x_3 x_4)$ für $x_3, x_4 \in M$ n verschiedene Werte annehmen könnte. Da die letzte Gleichung bei festem x_1, $f(x_3, x_4)$ und bei festem x_2, $f(x_3, x_4)$ eine eindeutige Lösung x_2 bzw. x_1 hat, würde man bei festem $f(x_3, x_4)$ als Lösungspaare $x_1 x_2$ die n Paare einer Permutation $x_1 \to x_2$ erhalten, und bei allen möglichen Werten des Paares $x_3 x_4$ genau n verschiedene Permutationen $x_1 \to x_2$. Wir zeigen nun aber, daß es bei $n \geqq 4$ stets Tafelpaare von der Art gibt, daß bei variierendem $x_3 x_4$ mehr als n verschiedene Permutationen $x_1 \to x_2$ auftreten. Man erhält die beiden Matrizen eines solchen Tafelpaares $T_1 T_2$, indem man in der Matrix (a_{ik}), wo $a_{ik} \in M$, $a_{ik} \equiv i + k - 1 \pmod{n}$, die beiden ersten Spalten bzw. Zeilen vertauscht (Bild 6). Nun läßt sich an Hand von

	1	2	3	4	5
1	**2**	**1**	3	4	5
2	**3**	**2**	4	5	1
3	**4**	**3**	5	1	2
4	**5**	**4**	1	2	3
5	**1**	**5**	2	3	4

T_1

	1	2	3	4	5
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**1**
2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
3	3	4	5	1	2
4	4	5	1	2	3
5	5	1	2	3	4

T_2

Bild 6

x_3	x_4	x_1	x_2	x_1	x_2
		1	$p(1)$	2	$p(2)$
1	1	1	1	2	4
1	2	1	2	2	5
1	3	1	3	2	1
1	4	1	4	2	2
1	5	1	5	2	3
2	1	1	5	2	1

Bild 7

(8) und Bild 6 eine Tabelle aufstellen, die zu den $n+1$ Paaren $x_3 x_4 = 11$, $12, \ldots, 1n$, 21 die zugehörigen Permutationen $x_1 \to x_2$ oder $x_1 \to p(x_1)$ angibt. Dabei genügt es, von jeder Permutation die beiden Anfangspaare $1, p(1)$ und $2, p(2)$ zu notieren (Bild 7). Man erhält für $x_3 x_4 = 11, \ldots, 1n$ n verschiedene Permutationen $x_1 \to x_2$, deren i-te mit dem Paar $x_1 x_2 = 1i$ beginnt, worauf bei der n-ten das Paar $x_1 x_2 = 2(n-2)$ folgt. Für $x_3 x_4 = 21$ dagegen ergibt sich eine Permutation $x_1 \to x_3$, die mit $x_1 x_2 = 1n$ und 21 beginnt, also bei $n > 3$ von den obigen n Permutationen verschieden ist. Damit ist Satz 2 bewiesen.

5. Da Ω_n für $n \geqq 4$ nicht i. G. assoziativ ist, ergibt sich die Aufgabe, die i. G. assoziativen Teilmengen von Ω_n zu ermitteln. Insbesondere erhebt sich die Frage, wie es bei Γ_n, der Menge aller Gruppen aus Ω_n, mit der Assoziativität i. G. steht[3]). Für $n = 4$ habe ich einstweilen Folgendes festgestellt: Zu dem Tafelpaar von Bild 8 gibt es kein links assoziiertes; also ist Γ_4 nicht i. G. assoziativ. Γ_4 besteht bekanntlich aus 4 nicht-zyklischen (zu Bild 8 a isomorphen) und 12 zyklischen (zu Bild 8 b isomorphen) Gruppen. Die Menge der 4 nicht-zyklischen Gruppen ist i. G. assoziativ, weil hier jedes einzelne Tafelpaar assoziativ ist.

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

a

	1	2	3	4
1	2	3	4	1
2	3	4	1	2
3	4	1	2	3
4	1	2	3	4

b

Bild 8

Zum Schluß sei noch ein sehr bekanntes Ω erwähnt, das nicht aus Quasigruppen besteht: die Boolesche Algebra mit zwei Elementen:

	1	2
1	1	2
2	2	2

	1	2
1	1	1
2	1	2

.

Man findet hier leicht, daß es 6 Wertsysteme gibt, von welchen zwei nur rechte und zwei nur linke Wertsysteme sind. Dieses Ω ist also nicht i. G. assoziativ.

[3]) Die Gruppen sind bekanntlich genau die assoziativen Quasigruppen.

Urach, Münsinger Str. 4

(Eingegangen am 15. Dezember 1956)

Salzmann, H.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 436—466 (1957)

Topologische projektive Ebenen

Von
Helmut Salzmann

Einleitung

Unter einer topologischen projektiven Ebene verstehen wir eine projektive Ebene, deren Punkt- und Geradenmenge topologische Räume sind derart, daß Verbinden und Schneiden stetige Operationen sind. Solche Ebenen haben eine Reihe überraschender topologischer Eigenschaften; z.B. sind die zugehörigen topologischen Räume regulär. Darüber hinaus können wir in Beantwortung einer von Freudenthal [**1956**] gestellten Frage zeigen, daß eine lokalkompakte projektive Ebene das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Die Geraden wie auch die punktierten Geraden einer zusammenhängenden lokalkompakten Ebene erweisen sich als kurvenweise zusammenhängend und lokal kurvenweise zusammenhängend.

Soweit gelten die Sätze in einer beliebigen topologischen projektiven Ebene, ohne daß irgendwelche Schließungssätze vorausgesetzt werden. Unter der Voraussetzung gewisser einfacher Schließungssätze läßt sich für die Topologie der Ebene noch mehr folgern: Gilt der desarguessche Satz für eine feste Achse und ein festes nicht auf ihr gelegenes Zentrum, so ist eine lokalkompakte projektive Ebene sogar kompakt. Dasselbe gilt übrigens auch, wenn die Topologie durch eine Anordnung der Ebene hervorgerufen wird. (Skornjakov hatte früher [**1954**] bewiesen, daß man in einer zusammenhängenden projektiven Ebene von der lokalen Kompaktheit auf die Kompaktheit der ganzen Ebene schließen kann.) Ist für ein Parallelgewebe in der Ebene die Thomson-Bedingung erfüllt (das bedeutet, daß die zu dem Gewebe gehörige Loop eine kommutative Gruppe ist), so sind die Geraden der Ebene homöomorph zu einer Sphäre; insbesondere hat die Ebene dann eine endliche topologische Dimension. Nebenbei ergibt sich bei dem Beweis, daß in einer zusammenhängenden kompakten Ebene nicht jedes vollständige Viereck kollineare Diagonalpunkte haben kann.

Der letzte Teil der Arbeit widmet sich den projektiven Ebenen, die zur gewöhnlichen reellen Ebene homöomorph sind. Wir zeigen zunächst, daß in einer solchen Ebene auch die Geraden homöomorph zur reellen Geraden sind. Man wird nicht erwarten können, daß die topologische Voraussetzung der Homöomorphie zur reellen Ebene allein die allgemeine Gültigkeit irgendeines Schließungssatzes zur Folge hat. Tatsächlich erweist es sich, wie in einer späteren Arbeit gezeigt werden soll, daß in der [**1902**] von Moulton konstruierten nichtdesarguesschen Ebene mit der gewöhnlichen reellen Topologie kein Schließungssatz allgemein gültig ist. Jedoch bestehen in einer zur reellen Ebene homöomorphen projektiven Ebene viel engere Beziehungen

zwischen Schließungssätzen, als ohne die topologische Voraussetzung. So ist etwa eine solche Ebene, in welcher der desarguessche Satz für eine feste Achse und jedes auf ihr gelegene Zentrum gilt (Translationsebene), sogar gleich der reellen Ebene. Erstaunlich ist neben diesem Resultat die Existenz einer projektiven Ebene mit der Topologie der reellen Ebene, in welcher der desarguessche Satz genau für die drei Ecken eines festen Dreiecks als Zentren und die Gegenseiten als zugehörigen Achsen gilt. Als Koordinatenbereich hat diese Ebene einen (echten, planaren, kommutativen) Neokörper mit kürzbarer Addition, womit die von PICKERT [**1956**] aufgeworfene Frage nach der Existenz solcher Neokörper beantwortet ist.

In einem angehängten Paragraphen wird die Frage, ob ein topologischer Ternärkörper Koordinatenbereich einer topologischen projektiven Ebene ist, für Alternativkörper bejahend beantwortet.

Den Herren R. BAER und G. PICKERT fühle ich mich für ihre vielen und wertvollen Anregungen zu großem Dank verpflichtet.

§ 1. Definitionen

Eine projektive Ebene besteht aus zwei Mengen von Dingen, die Punkte und Geraden genannt werden, und einer als Enthaltensein bezeichneten Relation zwischen Punkten und Geraden, die den folgenden drei Bedingungen genügt:

(I) Zu zwei verschiedenen Punkten p, q gibt es genau eine Gerade $G = p \cup q$, in der die beiden Punkte enthalten sind, $p \in G$ und $q \in G$. G heißt die Verbindungsgerade von p und q.

(II) Dual dazu gibt es zu zwei verschiedenen Geraden G, H genau einen „Schnittpunkt" $p = G \cap H$, der in beiden Geraden enthalten ist, $p \in G$ und $p \in H$.

(III) Es gibt vier verschiedene Punkte, von denen keine drei in ein und derselben Geraden enthalten sind.

Statt „p ist in der Geraden G enthalten" sagt man auch: p liegt auf G, G geht durch p, der Punkt p gehört der Geraden G an, G enthält p. Man kann eine Gerade G mit der Menge der in ihr enthaltenen Punkte identifizieren. Bei dieser Auffassung ist also jede Gerade eine Teilmenge der Gesamtheit P aller Punkte. $\mathfrak{G}$ sei die Menge aller Geraden[1]). Eine Menge P wird zu einem topologischen Raum, wenn man gewisse Teilmengen von P als offene Mengen auszeichnet, derart, daß jede Vereinigung von offenen Mengen wieder offen ist (auch die leere Menge $\emptyset$ als „leere Vereinigung") und ebenso jeder Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen (darunter auch der ganze Raum P als „leerer Durchschnitt"). Die Komplemente offener Mengen heißen abgeschlossen. Umgebung eines Punktes p heißt jede Menge V, die eine offene Menge O enthält, welcher der Punkt p noch angehört. $\mathfrak{U}(p)$ sei die Gesamtheit der Umgebungen von p. Eine Untermenge A eines topologischen

[1]) Die Bezeichnungen, die sich auf projektive Ebenen beziehen, lehnen sich an PICKERT [**1955**] an, die topologischen Bezeichnungen an BOURBAKI [**1951**].

Raumes P wird in natürlicher Weise zu einem topologischen Raum, wenn man die Spuren der offenen Mengen von P auf A als offene Mengen von A nimmt. Die Produktmenge zweier topologischer Räume wird mit den Produkten offener Mengen und deren Vereinigungen als offenen Mengen ein topologischer Raum. Eine Abbildung eines topologischen Raumes in einen anderen heißt stetig, wenn das volle Urbild jeder offenen Menge des Bildraumes eine offene Menge des Urbildraumes ist. Sind bei einer projektiven Ebene der Raum P der Punkte und der Raum $\mathfrak{G}$ der Geraden topologische Räume, so ist damit erklärt, was es heißt, die Bildung der Verbindungsgeraden (also die Abbildung des Raumes der Paare verschiedener Punkte auf ihre Verbindungsgeraden) sei stetig, und dual auch die Stetigkeit der Bildung des Schnittpunktes. Eine projektive Ebene soll topologisch heißen, wenn die Bildung von Verbindungsgerader und Schnittpunkt in diesem Sinne stetig ist und es nicht leere, echte, offene Teilmengen von P gibt, aber nicht alle Teilmengen von P offen sind. Die letzte Festsetzung dient nur zur Vermeidung unbequemer Sonderfälle. Ist G eine Gerade und p ein nicht auf ihr gelegener Punkt, so bezeichne $G \simeq p$ die „perspektive" Abbildung $x \to x \cup p$ der Menge der Punkte auf G auf die Menge der Geraden durch p. Die durch Hintereinander-Ausführung von Perspektivitäten entstehenden Selbstabbildungen einer Geraden heißen Projektivitäten. Sie bilden bekanntlich eine dreifach transitive Gruppe auf der Geraden. In einer topologischen Ebene ist jede Perspektivität und damit auch jede Projektivität ein Homöomorphismus.

§ 2. Koordinaten und topologische Ternärkörper

Wählt man vier Punkte $0, e, u, v$ mit der in (III) genannten Eigenschaft und nimmt man die Gerade $u \cup v$ und alle auf ihr liegenden Punkte aus der projektiven Ebene heraus, so erhält man eine affine Ebene. Zwei Geraden der affinen Ebene, die entweder zusammenfallen oder sich nicht schneiden, heißen parallel. Durch die Festsetzung

$$(*) \qquad \begin{cases} x_p = \big(((p \cup v) \cap (0 \cup e)) \cup u\big) \cap (0 \cup v) \\ y_p = (p \cup u) \cap (0 \cup v) \end{cases}$$

werden die Punkte p der affinen Ebene umkehrbar eindeutig den Paaren (x_p, y_p) von „Koordinaten", d.h. Elementen der Menge T der von v verschiedenen Punkte auf $0 \cup v$ zugeordnet. y_e wird mit 1 bezeichnet. Als $\tau(s, x, t)$ erklärt man dasjenige Element y, für welches (x, y) auf der Parallelen zu $(0, 0) \cup (1, s)$ durch $(0, t)$ liegt. T wird zusammen mit der ternären Verknüpfung τ zu einer als Ternärkörper bezeichneten algebraischen Struktur, in der sich alle geometrischen Beziehungen wiederfinden. Die Übersetzung der Eigenschaften (I), (II) liefert für den Ternärkörper:

(1) Zu s, x, y gibt es genau ein t mit $y = \tau(s, x, t)$.

(2) Zu $x_1 \neq x_2$ und y_1, y_2 gibt es genau ein Paar s, t mit $y_i = \tau(s, x_i, t)$ für $i = 1, 2$.

(3) Zu $s_1 \neq s_2$ und t_1, t_2 gibt es genau ein x mit $\tau(s_1, x, t_1) = \tau(s_2, x, t_2)$.

In einem Ternärkörper führt man die beiden folgenden, als Addition und Multiplikation bezeichneten binären Verknüpfungen ein:

$$x + t = \tau(1, x, t), \qquad s\,x = \tau(s, x, 0).$$

Die Menge T bildet zusammen mit der Addition eine Loop mit dem neutralen Element 0, die Menge $T^\times = T - 0$ zusammen mit der Multiplikation eine Loop mit dem neutralen Element 1. [In einer desarguesschen projektiven Ebene gilt $\tau(s, x, t) = s\,x + t$ und T ist zusammen mit der Addition und Multiplikation ein Schiefkörper.]

Liegt eine topologische projektive Ebene vor, so wird die affine Ebene durch die Darstellung (*) topologisches Produkt der affinen Geraden T mit sich selbst (SKORNJAKOV [**1954**], SALZMANN [**1955**]). (T, τ) wird ein topologischer Ternärkörper, das soll heißen, $\tau(s, x, t)$ hängt stetig von allen drei Veränderlichen (gleichzeitig) ab und jede der in (1), (2), (3) geforderten Umkehrungen ist stetig in allen übrigen Veränderlichen. Umgekehrt ist es aber nicht gelungen allgemein zu beweisen, daß ein topologischer Ternärkörper wieder zu einer topologischen projektiven Ebene führt. In einem topologischen Ternärkörper T bildet T zusammen mit der Addition eine topologische Loop, d.h. die Addition sowie ihre rechte und linke Umkehrung sind stetige Funktionen. Die Abbildung $x \to \tau(s, x, t)$ stellt für $s \neq 0$ einen Homöomorphismus von T dar; denn $\tau(s, x, t) = \tau(0, x, y) = y$ ist bei festem s, t $(s \neq 0)$ stetig nach x auflösbar. Die Menge dieser Abbildungen ist nach (2) wegen $\tau(0, x, t) = t$ zweifach transitiv auf T.

Ein Ternärkörper einer topologischen projektiven Ebene ist ein regulärer topologischer Raum. Hieraus folgt, daß auch jede projektive Ebene als topologischer Raum regulär ist (SKORNJAKOV [**1954**], SALZMANN [**1955**]).

§ 3. Abzählbarkeitseigenschaften in lokalkompakten projektiven Ebenen und Ternärkörpern

Ein topologischer Raum heißt kompakt, wenn sich aus jeder Überdeckung mit offenen Mengen eine Überdeckung mit endlich vielen dieser offenen Mengen auswählen läßt; er heißt lokalkompakt, wenn es zu jedem Punkt eine Umgebung gibt, die als Unterraum des Gesamtraumes kompakt ist. Man sagt, ein topologischer Raum habe eine abzählbare Basis (oder: er erfülle das zweite Abzählbarkeitsaxiom), wenn es abzählbar viele offene Mengen gibt, so daß sich jede offene Menge als Vereinigung von einigen dieser offenen Mengen darstellen läßt; man sagt, er sei lokal von abzählbarer Basis, wenn es zu jedem Punkt abzählbar viele Umgebungen V_n gibt, so daß jede Umgebung des Punktes eine Umgebung V_n enthält. In diesem Abschnitt wird gezeigt:

Jede lokalkompakte projektive Ebene ist von abzählbarer Basis.

Dazu beweist man zuerst:

Ein lokalkompakter Ternärkörper ist lokal von abzählbarer Basis.

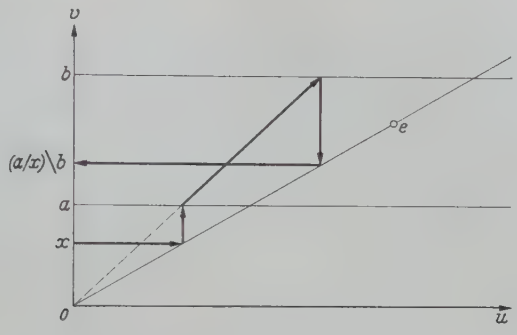
Um das einzusehen, beachtet man zunächst, daß der Ternärkörper als nicht diskret vorausgesetzt war, also nicht alle Punkte offene Mengen sind, und wegen der Homogenität sogar kein Punkt offen ist. Berücksichtigt man noch (T_1) und die Tatsache, daß der Durchschnitt endlich vieler Umgebungen wieder eine Umgebung ist, so folgt, daß jede Umgebung unendlich viele Elemente enthält. Man betrachtet nun eine kompakte Umgebung irgendeines Punktes und in ihr eine Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ verschiedener Punkte a_n. Diese Folge muß auf Grund der Kompaktheit der sie enthaltenden Menge einen Häufungspunkt haben, d.h. einen solchen Punkt a, daß jede Umgebung von a wenigstens ein a_n enthält. Durch Anwendung eines Homöomorphismus kann man sich a in 0 überführt denken, so daß man also eine Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ finden kann, die 0 zum Häufungspunkt hat. Wählt man noch eine kompakte Umgebung W von 0, so bilden die $V_n = a_n W$ die geforderte abzählbare Umgebungsbasis von 0; denn sei V irgendeine Umgebung von 0, w ein Punkt aus W. Dann gibt es wegen $0w = 0$ eine Umgebung V_w von 0 und eine Umgebung W_w von w mit $V_w W_w \subseteq V$. Jetzt kann man W mit endlich vielen $W_{w_1}, \ldots, W_{w_k}$ der W_w überdecken. Für $V_0 = V_{w_1} \cap \cdots \cap V_{w_k}$ gilt $V_0 W \subseteq V$. Nun enthält aber V_0 ein a_n, so daß also insbesondere V_n in V enthalten ist. Infolge der Homogenität von T überträgt sich die abzählbare Umgebungsbasis auch auf jeden anderen Punkt x von T.

Ist der Ternärkörper einer topologischen projektiven Ebene lokalkompakt, so ist auch die projektive Ebene lokalkompakt; denn die affine Ebene ist es als Produkt eines lokalkompakten Raumes mit sich selbst, und dann ist es wegen der Abgeschlossenheit der Geraden auch die projektive Ebene.

Ein Ternärkörper einer lokalkompakten projektiven Ebene ist σ-kompakt. Das bedeutet, er ist Vereinigung von höchstens abzählbar vielen kompakten Mengen. Beim Beweis wird wesentlich von der Einbettung des Ternärkörpers in eine topologische projektive Ebene Gebrauch gemacht. Aus einer sich gegen 0 häufenden Folge von Elementen $\neq 0$ werde eine gegen 0 konvergente Teilfolge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ausgewählt, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Das ist möglich, da der Raum lokal von abzählbarer Basis ist. Ferner sei a ein von 0 verschiedenes Element. Nach der multiplikativen Loopeigenschaft von $T^{\times}$ bestimmt man s_n mit $s_n a_n = a$. Wählt man nun noch eine kompakte Umgebung W von 0, so ist jedes Element b von T in einem $s_n W$ enthalten, d.h. aber nichts anderes als $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} s_n W$, und jedes $s_n W$ ist homöomorph zu W, also kompakt. Schreibt man nämlich für $xy = z$ auch $x = z/y$ oder $y = x\backslash z$ und setzt man $b = s_n b_n$, wobei man sich auf $b \neq 0$ beschränken kann, so ist $b_n = (a/a_n)\backslash b$ und es bleibt noch zu zeigen, daß mit a_n auch die b_n gegen 0 konvergieren, also schließlich in W liegen. Hierzu muß man auf die geometrische Definition der Multiplikation zurückgehen. Die Abbildung $x \to (a/x)\backslash b$ wird für $a \neq 0$, $b \neq 0$ durch eine Projektivität der Geraden $0 \cup v$ gegeben, und zwar bildet man $0 \cup v$ perspektiv auf das Geradenbüschel in u ab, $0 \cup v \sim u$ und weiter

$$u \sim 0 \cup e \sim v \sim a \cup u \sim 0 \simeq b \cup u \simeq v \sim 0 \cup e \sim u \simeq 0 \cup v.$$

Sie stellt also einen Homöomorphismus von $0 \cup v$ dar. Dabei geht, wie man nachrechnet, 0 in sich über, also jede gegen 0 konvergente Folge wieder in eine solche.



Aus den beiden eben bewiesenen Sätzen folgt:

Eine lokalkompakte projektive Ebene ist lokal von abzählbarer Basis und σ-kompakt.

Denn beide Eigenschaften übertragen sich von den Faktoren auf das Produkt zweier topologischer Räume, also von dem Ternärkörper auf die affine Ebene. Die abzählbare Umgebungsbasis ist dann natürlich auch in der projektiven Ebene vorhanden. Ferner ist die projektive Gerade σ-kompakt, also auch die projektive Ebene als Vereinigung zweier σ-kompakter Räume, nämlich der affinen Ebene und der „uneigentlichen" Geraden $u \cup v$.

Jetzt wird die Existenz einer abzählbaren Basis gezeigt. Der Beweis wird zuerst für eine kompakte Teilmenge K eines zu der Ebene gehörigen Ternärkörpers T geführt. Er beruht auf den folgenden Gedanken: Bei einem kompakten Raum K erzeugen die Umgebungen der Diagonale D von $K \times K$ [die offenen Mengen von $K \times K$, welche die Menge D der Paare $x \times x$ $(x \in K)$ enthalten] eine uniforme Struktur, und zwar die einzige, welche mit der Topologie von K verträglich ist (Bourbaki [**1951**], Top. gén. II § 4, Th. 1).

Diese Umgebungen von D sollen als „Bänder" bezeichnet werden. Gibt es nun eine abzählbare Basis für den Filter der Bänder und gilt außerdem für den topologischen Raum die Lindelöfsche Überdeckungseigenschaft, die besagt, daß sich aus jeder Überdeckung mit offenen Mengen abzählbar viele dieser offenen Mengen auswählen lassen, die den Raum auch schon überdecken, so hat der Raum eine abzählbare Basis. Es wird sich nun zeigen, daß man die Bänder der uniformen Struktur von K auf die folgende Weise erhalten kann: Man nimmt die Menge aller Punkte, die auf irgendeiner von den Geraden liegen, die zu einer Umgebung der Geraden $0 \cup e$ (in der Topologie des Raumes $\mathfrak{G}$ aller Geraden) gehören und schränkt diese Menge auf $K \times K$ ein. Nun zeigt man zunächst, daß zugleich mit P auch der Raum $\mathfrak{G}$ lokal von abzählbarer Basis ist. Damit hat man dann eine abzählbare Basis für den Bandfilter der uniformen Struktur von K gefunden. Die Lindelöfsche Überdeckungseigenschaft ergibt sich als Abschwächung der Kompaktheit

von K. Mit Hilfe der σ-Kompaktheit von T kann man dann eine abzählbare Basis für T angeben. Die Konstruktion einer solchen für P macht hierauf keine Schwierigkeiten mehr.

Durchführung des Beweises. Es werde der Schluß vorweggenommen, daß aus dem Vorhandensein einer abzählbaren Basis für den Bandfilter und der Lindelöfschen Überdeckungseigenschaft die Existenz einer abzählbaren Basis folgt. Nach den definierenden Eigenschaften einer uniformen Struktur von K kann man bei Vorhandensein einer abzählbaren Basis für den Filter der Bänder induktiv eine Folge $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ von Bändern angeben, die den folgenden Bedingungen genügen: Die B_i bilden eine Basis für die uniforme Struktur, jedes B_i ist eine offene Menge in $K \times K$, $B_{i+1}^2 \subseteq B_i = B_i^{-1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Dabei bedeutet B^{-1} die Menge der Paare $y \times x$ mit $x \times y \in B$ und B^2 die Menge der Paare $x \times z$, für die es ein y gibt mit $x \times y \in B$ und $y \times z \in B$. Ferner werde mit $V(x, B)$ die Menge der y bezeichnet, für die $x \times y \in B$. Die $V(x, B_i)$ bilden dann eine Umgebungsbasis für den Punkt x. Läßt man x alle Punkte des Raumes K durchlaufen, so erhält man eine Basis für das System der offenen Mengen von K.

Hieraus muß nun eine passende abzählbare Teilmenge ausgesucht werden, die auch noch eine Basis für die offenen Mengen bildet. Nach der Lindelöfschen Überdeckungseigenschaft kann man K für jedes feste i mit abzählbar vielen $V(x_{ik}, B_{i+1})$ überdecken. Wenn man jetzt zeigen kann, daß jedes $V(x, B_i)$ ein $V(x_{ik}, B_{i+1})$ enthält, das seinerseits noch Umgebung von x ist, dann ist damit bewiesen, daß die Gesamtheit der $V(x_{ik}, B_{i+1})$ $(i, k = 1, 2, \ldots)$ eine abzählbare Basis der gewünschten Art ist. Da nun die $V(x_{ik}, B_{i+1})$ den ganzen Raum überdecken, gibt es ein x_{ik} mit $x \in V(x_{ik}, B_{i+1})$, d.h. $x_{ik} \times x \in B_{i+1}$ oder $x \times x_{ik} \in B_{i+1}$. Gilt jetzt noch $x_{ik} \times y \in B_{i+1}$, also $y \in V(x_{ik}, B_{i+1})$, so folgt $x \times y \in B_i$, $y \in V(x, B_i)$, und daher $x \in V(x_{ik}, B_{i+1}) \subseteq V(x, B_i)$.

Um nun zu zeigen, daß die Bänder von K in der angegebenen Weise erhalten werden können, geht man so vor: Es sei $B(M, N)$ die Menge der Paare $x \times y \in K \times K$ mit $y \in \tau(M, x, N)$, wo $\tau(M, X, N)$ entsprechend der Komplexmultiplikation in der Gruppentheorie zu verstehen ist. Läßt man jetzt M eine abzählbare Basis von Umgebungen der 1 in der Topologie von T durchlaufen und N eine abzählbare Basis von Umgebuugen der 0 (man kann sich hierbei auf offene Mengen M, N beschränken), so erhält man in der Gesamtheit der $B(M, N)$ eine abzählbare Basis für den Filter der Bänder von K. Dazu muß man nur noch nachweisen, daß die $B(M, N)$ den Bandfilter erzeugen, der zu der Topologie von K gehört. Zum Nachweis der Bandfiltereigenschaft ist nur zu zeigen, daß es zu gegebenem M, N Mengen M', N' mit $B^{-1}(M', N') \circ B(M', N') \subseteq B(M, N)$ gibt. B^{-1} ist wie vorher erklärt, $B \circ C$ ist das relationstheoretische Produkt von B und C, also die Menge der $x \times z$, für die es ein y gibt mit $x \times y \in B$ und $y \times z \in C$. Sind M, N offene Mengen von T, so ist $B(M, N)$ eine offene Menge von $K \times K$, wie sich folgendermaßen ergibt: Die Menge der Geraden der Form $y = \tau(m, x, n)$ mit $m \in M$, $n \in N$ bildet eine offene Umgebung $\mathfrak{S}$ von $0 \smile e$. Betrachtet man eine solche Gerade

als Verbindungsgerade von (x, y) mit einem zweiten Punkt $(x', \tau(m, x', n))$ auf ihr, so folgt aus den Stetigkeitsforderungen, daß es eine Umgebung V von (x, y) und eine Umgebung V' des zweiten Punktes so gibt, daß die Verbindungsgerade eines Punktes aus V mit einem Punkt aus V' stets zu $\mathfrak{S}$ gehört. Dann liegt V in der Vereinigung $[\mathfrak{S}]$ aller als Punktmengen aufgefaßten Geraden S aus $\mathfrak{S}$, d.h. $[\mathfrak{S}]$ ist offen, $B(M, N) = [\mathfrak{S}] \cap K \times K$. Für $x \in K$ ist $x \times \tau(1, x, 0) = x \times x \in B(M, N)$. Wegen der Stetigkeit von τ gibt es offene Umgebungen M_x, N_x, O_x von $1, 0, x$, so daß

$$\tau(M_x, O_x, N_x) \times \tau(M_x, O_x, N_x) \cap K \times K \subseteq B(M, N).$$

Man kann die kompakte Menge K mit endlich vielen $O_{x_1}, \ldots, O_{x_n}$ der O_x überdecken. Setzt man $M' = \bigcap_{i=1}^{n} M_{x_i}$, $N' = \bigcap_{i=1}^{n} N_{x_i}$, so ist

$$B^{-1}(M', N') \circ B(M', N') = \bigcup_{x \in K} \tau(M', x, N') \times \tau(M', x, N') \cap K \times K,$$

also wirklich in $B(M, N)$ enthalten. Für offene M, N bilden daher die $B(M, N)$ eine Basis von offenen Bändern, erzeugen also auf K eine Topologie, die höchstens gröber ist, als die auf K vorgegebene. Nun ist aber der Durchschnitt der $B(M, N)$, wenn man M, N das System der Umgebungen von $1, 0$ durchlaufen läßt, nichts anderes als die Diagonale D von K (wegen der Stetigkeit von τ). Daher ist die von den $B(M, N)$ erzeugte Topologie regulär. Nun kann eine kompakte Topologie nicht echt feiner sein, als irgendeine andere reguläre Topologie auf demselben Raum; denn ist E' ein Hausdorff-Raum, E dieselbe Punktmenge mit einer kompakten Topologie, die feiner oder gleich der von E' ist, dann ist die identische Abbildung von E auf E' stetig, führt also die abgeschlossenen Mengen von E, die ja in E kompakt sind, in kompakte Mengen von E' über, und kompakte Mengen eines Hausdorff-Raumes sind wieder abgeschlossen: Die Topologie von E' ist auch feiner oder gleich der von E, d.h. die beiden Topologien sind gleich. Also muß die von den $B(M, N)$ erzeugte Topologie mit der gegebenen auf K übereinstimmen.

Hiermit ist bewiesen: Jede kompakte Teilmenge K von T hat eine abzählbare Basis für die Topologie. Nun stellt man, was nach dem Beweis für die σ-Kompaktheit von T möglich ist, T dar als Vereinigung von abzählbar vielen offenen Mengen Q_n, so daß jedes Q_n in einer kompakten Menge enthalten ist. Dann hat jedes Q_n eine abzählbare Basis. Nimmt man alle diese zusammen, so erhält man eine abzählbare Basis von T. Mit T hat auch $T \times T$ und damit jede affine Ebene eine abzählbare Basis. Überdeckt man jetzt P mit drei offenen Mengen, von denen jede eine ganze Gerade nicht enthält, und nimmt man die abzählbaren Basen für diese offenen Mengen zusammen, so erhält man schließlich auch die abzählbare Basis für P.

§ 4. Kompaktheit der projektiven Ebene

Die reelle affine Ebene ist lokalkompakt, die reelle projektive Ebene ist sogar kompakt. Das legt die Frage nahe, ob oder unter welchen Voraussetzungen aus der lokalen Kompaktheit einer topologischen projektiven Ebene

ihre Kompaktheit folgt. Ein erstes Ergebnis in dieser Richtung, das wegen seiner schlechten Zugänglichkeit hier mit Beweis wiedergegeben werden soll, stammt von SKORNJAKOV [**1954**]:

Eine topologische projektive Ebene, deren Geraden kompakt sind, ist selbst kompakt.

Damit ist die gestellte Frage darauf zurückgeführt, wann die Geraden einer lokalkompakten Ebene kompakt sind; denn sind die Geraden kompakt, so ist die Ebene lokalkompakt, und ist die projektive Ebene kompakt, so auch die projektiven Geraden als abgeschlossene Punktmengen in der Ebene. Der Hauptschritt des Beweises ist nun der folgende: Sind die Geraden einer projektiven Ebene kompakt und ist $\mathfrak{L}$ eine kompakte Menge im Raum $\mathfrak{G}$ aller Geraden, so daß die Menge $[\mathfrak{L}]$ der Punkte, die auf irgendeiner Geraden aus $\mathfrak{L}$ liegen (d.h. die Vereinigung aller als Punktmengen aufgefaßten Geraden L aus $\mathfrak{L}$) nicht der ganze Raum P ist, so ist $[\mathfrak{L}]$ kompakt. Um das einzusehen, bedient sich SKORNJAKOV eines Kompaktheitskriteriums, das überabzählbare absteigende Folgen abgeschlossener Mengen verwendet. Wegen der bewiesenen Existenz einer abzählbaren Basis kommt man aber mit abzählbaren Folgen aus und kann das übliche Kriterium benutzen. Um für eine Folge nicht leerer abgeschlossener Mengen $A_n \subseteq [\mathfrak{L}]$ zu beweisen, daß sie nicht leeren Durchschnitt hat, wählt man einen Punkt p, der nicht in $[\mathfrak{L}]$ liegt und eine nicht durch p gehende Gerade G, und zeigt zunächst, daß jede abgeschlossene Menge $A \subseteq [\mathfrak{L}]$ bei der Projektion aus p auf G, d.h. der Abbildung $x \to (x \cup p) \cap G$ von A auf eine Menge B in G, wieder in eine abgeschlossene Menge übergeht. Hierbei geht wesentlich die Kompaktheit von $\mathfrak{L}$ ein, und zwar so: Jedem Punkt x aus B ordnet man irgendeine Gerade L_x aus $\mathfrak{L}$ zu, die durch irgendeinen Urbildpunkt von x hindurchgeht. Diese Auswahl der L_x werde jetzt festgehalten. Häuft sich eine Menge von Punkten x aus B gegen einen Punkt z, der dann natürlich auch auf G liegt, so kann man eine Gerade L aus $\mathfrak{L}$ finden, gegen die sich die entsprechenden L_x häufen, genauer gesagt, eine Gerade L, so daß es in jeder beliebigen Umgebung von L Geraden L_x mit x beliebig nahe bei z gibt. Wäre das nämlich nicht der Fall, so gäbe es zu jeder Geraden L aus $\mathfrak{L}$ eine Umgebung $\mathfrak{S}$ und dazu eine Umgebung V von z, so daß $L_x \notin \mathfrak{S}$ für alle $x \in V \cap B$ gilt. Nun könnte $\mathfrak{L}$ mit endlich vielen der $\mathfrak{S}$ überdeckt werden, und dann wäre der Durchschnitt der entsprechenden endlich vielen V frei von Punkten x aus B im Widerspruch dazu, daß sich die x gegen z häufen. Für die so gefundene Gerade L ist $y = L \cap (p \cup z)$ Häufungspunkt von A; denn in einer beliebigen Umgebung von y findet sich ein Punkt $L_x \cap (p \cup x)$, d.h. ein nach Definition zu A gehöriger Urbildpunkt von x. Da A abgeschlossen war, gehört y zu A. Bei der Projektion geht y in den Punkt z über, der somit zu B gehört, d.h. B ist abgeschlossen. Die A_n gehen also bei der Projektion in eine absteigende Folge nicht leerer abgeschlossener Mengen $B_n \subseteq G$ über. Da G kompakt ist, haben alle B_n wenigstens einen Punkt q gemeinsam. Die Gerade $H = p \cup q$ hat nun mit allen A_n einen nicht leeren Durchschnitt. Da auch H kompakt ist, muß der Durchschnitt der A_n mit H noch Punkte gemeinsam haben,

und damit ist die Behauptung über die Kompaktheit von $[\mathfrak{L}]$ bewiesen. Um jetzt zur Kompaktheit von ganz P zu gelangen, sucht man P zu überdecken mit einer Menge $[\mathfrak{L}]$ der eben betrachteten Art und einer kompakten Umgebung eines nicht zu $[\mathfrak{L}]$ gehörigen Punktes. Das gelingt auf folgende Weise: Es seien p, p_1, p_2 nicht kollineare Punkte. Auf der Geraden $p \cup p_i$ wählt man nun kompakte Mengen U_i, V_i, deren Vereinigung die ganze Gerade $p \cup p_i$ selbst ist, und zwar so, daß $p_i \notin U_i$ und $p \notin V_i$. Dann ist die zu $U_1 \times U_2$ homöomorphe Menge $K = (U_1 \cup p_2) \cap (U_2 \cup p_1)$ kompakt. Ebenso ist die zu $V_1 \times V_2$ homöomorphe Geradenmenge $V_1 \cup V_2$ eine kompakte Menge in $\mathfrak{G}$. Nach dem ersten Beweisschritt ist also $[V_1 \cup V_2]$ kompakt. Wegen $p_i \in V_i$ überdeckt $[V_1 \cup V_2]$ aber $P - K$. Daher ist P als Vereinigung von zwei kompakten Mengen kompakt.

Skornjakov schließt nun irrtümlicherweise, daß man die Geraden einer lokalkompakten topologischen projektiven Ebene durch Projektion einer kompakten Umgebung eines Punktes aus diesem Punkt als Projektionszentrum als stetiges Bild einer kompakten Menge erhalten könne, und daß sie somit selbst kompakt seien. Dabei übersieht er, daß die Projektion im Zentrum selbst nicht erklärt ist und dort auch nicht stetig ergänzt werden kann, und daß die um das Zentrum verminderte Umgebung im allgemeinen nicht mehr kompakt sein wird. Das Versagen seiner Schlußweise zeigt sich schon an der diskreten Ebene, die Skornjakov nicht ausschließt. In ihr ist jeder Punkt eine kompakte Umgebung von sich selbst; also ist sie lokalkompakt. Kompakt ist sie aber nur, wenn sie endlich ist. Weitere Beispiele lokalkompakter, aber nicht kompakter topologischer projektiver Ebenen sind nicht bekannt.

Es gibt nun aber einige, in ihrem Wesen ganz verschiedene, Zusatzvoraussetzungen, unter denen der Schluß von der lokalen Kompaktheit der Ebene auf die „globale" Kompaktheit gezogen werden kann. Die erste ist rein topologischer Art und besagt den Zusammenhang der topologischen Ebene; die zweite setzt die topologische Struktur der Ebene in nähere Beziehung zur geometrischen, und zwar soll die Topologie durch die Anordnung der Ebene hervorgerufen werden; die dritte schließlich ist von rein geometrischer, oder man kann auch sagen, algebraischer Natur, indem sie gewisse Spezialfälle des Schließungssatzes von Desargues fordert, die bei Übersetzung in die Sprache des Ternärkörpers zu bestimmten schwachen Assoziativitätsgesetzen für die Multiplikation führen. Auf alle diese Dinge wird an späteren Stellen eingegangen werden.

§ 5. Zusammenhangsverhältnisse in lokalkompakten Ebenen

Ein topologischer Raum heißt zusammenhängend, wenn er nicht in die Summe zweier nicht leerer offener Mengen zerlegt werden kann. (Dabei soll unter „Summe" die Vereinigung paarweise disjunkter Mengen verstanden werden.) Da das Komplement einer offenen Menge abgeschlossen ist, bedeutet Zusammenhang nichts anderes, als daß es in dem Raum keine zugleich offenen und abgeschlossenen Mengen gibt außer der leeren Menge und dem

ganzen Raum selbst. Unter der zusammenhängenden Komponente eines Punktes x in einem topologischen Raum versteht man die größte, den Punkt x enthaltende zusammenhängende Menge in dem Raum. Sie ergibt sich als Vereinigung aller den Punkt enthaltenden zusammenhängenden Mengen und ist immer vorhanden. Ein Raum, in dem die zusammenhängende Komponente jedes Punktes nur aus dem Punkt selbst besteht, heißt völlig unzusammenhängend. Als den Rand $rd\,A$ einer Menge A bezeichnet man die Differenz zwischen der kleinsten abgeschlossenen Menge, welche A umfaßt, und der größten offenen Menge, die in A enthalten ist. Genau die zugleich offenen und abgeschlossenen Mengen haben also keinen Rand. Hat ein Punkt eine randlose Umgebung, so muß die Komponente des Punktes in dieser enthalten sein; denn sonst ergäbe sich eine Zerlegung der Komponente in die Summe zweier abgeschlossener Mengen. Der Durchschnitt aller randlosen Umgebungen eines Punktes x heißt die Quasikomponente von x und umfaßt nach dem eben Gesagten die zusammenhängende Komponente von x. Bestehen alle Quasikomponenten in einem Raum nur aus einzelnen Punkten, so heißt der Raum nirgends zusammenhängend. Gibt es sogar zu jedem Punkt beliebig kleine randlose Umgebungen, mit anderen Worten, bilden die randlosen Umgebungen eines Punktes eine Basis für seinen Umgebungsfilter, so heißt der Raum nulldimensional.

Für beliebige topologische projektive Ebenen war früher bewiesen worden (SALZMANN [**1955**]):

Nimmt man aus einer zusammenhängenden projektiven Ebene einen Punkt oder eine ganze Gerade heraus, so ist die verbleibende Punktmenge auch noch zusammenhängend. Die Geraden einer zusammenhängenden projektiven oder affinen Ebene sind zusammenhängend. Ist die projektive Ebene nicht zusammenhängend, so ist sie sogar nirgends zusammenhängend (und mit ihr natürlich auch alle Untermengen).

Für lokalkompakte projektive Ebenen lassen sich diese Aussagen wesentlich einfacher beweisen, als im allgemeinen Fall, und auch noch verschärfen. Die wichtigste Verschärfung ist die, daß eine lokalkompakte zusammenhängende projektive Ebene auch lokalzusammenhängend ist; das bedeutet, daß es zu jedem Punkt beliebig kleine zusammenhängende Umgebungen gibt. Zuerst ergibt sich anknüpfend an den Beweis für die Existenz einer abzählbaren Umgebungsbasis in einem lokalkompakten Ternärkörper:

Ein lokalkompakter topologischer Ternärkörper (und insbesondere eine Gerade einer lokalkompakten affinen Ebene) *ist entweder nulldimensional oder zusammenhängend und lokalzusammenhängend.*

Die Homöomorphismen eines topologischen Raumes, die einen Punkt x festlassen, führen nämlich auch die zusammenhängende Komponente von x in sich über. Bei einem topologischen Ternärkörper bilden diese Homöomorphismen aber wegen der zweifachen Transitivität der Gruppe aller Homöomorphismen eine Gruppe, die auf den von x verschiedenen Punkten noch

einfach transitiv ist. Enthält also die zusammenhängende Komponente eines Punktes noch einen weiteren Punkt, so enthält sie sogar alle Punkte. Daher ist ein topologischer Ternärkörper entweder völlig unzusammenhängend oder zusammenhängend. Man kann diesen selben Schluß auch mit der Quasikomponente durchführen und erhält dann etwas stärker: Ein topologischer Ternärkörper ist entweder nirgends zusammenhängend oder zusammenhängend. Nun sei W eine kompakte Umgebung von 0. Im ersten Fall besteht dann die Quasikomponente von 0 in dem kompakten Raum W erst recht nur aus dem Element 0 allein. Um hieraus die Nulldimensionalität zu beweisen, muß man zu einer beliebig kleinen, ganz in W enthaltenen, offenen Umgebung U von 0 eine randlose Umgebung von 0 angeben können, die in U enthalten ist. Die Menge $W - U$ ist abgeschlossen und daher kompakt. Für jeden Punkt x aus $W - U$ kann man, da ja der Durchschnitt aller randlosen Umgebungen von 0 nur aus dem Element 0 selbst besteht, eine randlose Umgebung V_x von 0 finden, die den Punkt x nicht enthält. $W - V_x$ ist eine Umgebung von x in dem Raum W. Die kompakte Menge $W - U$ kann mit endlich vielen $W - V_{x_1}, \ldots, W - V_{x_n}$ dieser Umgebungen überdeckt werden, dann ist der Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$ in U enthalten, und er ist eine randlose Umgebung von 0.

Im zweiten Fall, wo der Ternärkörper zusammenhängend ist, kann also auch die in einer kompakten Umgebung W von 0 gebildete Quasikomponente C von 0 nicht nur aus dem Element 0 allein bestehen. C ist als Durchschnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen und daher kompakt. Darum gibt es, wie in § 3 bewiesen, eine Umgebung V von 0 mit $VC \subseteq W$. (Hierbei ist VC das Komplexprodukt in der multiplikativen Loop des Ternärkörpers.) Sieht man VC an als die Vereinigung der Mengen vC, wo v die Menge V durchläuft, so zeigt sich, daß VC als Vereinigung von zusammenhängenden Mengen mit paarweise nicht leerem Durchschnitt (0 ist enthalten in vC) selbst zusammenhängend ist; sieht man VC an als die Vereinigung der Mengen Vc, wo c die Menge C durchläuft, so ergibt sich weiter, daß VC eine ganze Umgebung von 0 enthält und damit selbst Umgebung von 0 ist. Die abgeschlossene Hülle $\overline{VC}$ von VC ist zusammenhängend und als Untermenge von W kompakt. Für eine gegen 0 konvergente Folge a_n bilden also die $a_n \overline{VC}$, wie in § 3 bewiesen, eine Basis von Umgebungen der 0. Jede Menge $a_n \overline{VC}$ ist homöomorph zu $\overline{VC}$ und somit zusammenhängend. Für jeden anderen Punkt des Ternärkörpers gilt Entsprechendes. Damit ist in diesem Fall der lokale Zusammenhang des Ternärkörpers bewiesen. Ist nun eine Gerade einer affinen Ebene nulldimensional, so auch die affine Ebene selbst als topologisches Produkt zweier Geraden, aber dann ist auch die projektive Ebene nulldimensional und folglich nicht zusammenhängend. Umgekehrt überträgt sich auch Zusammenhang und lokaler Zusammenhang von der affinen Geraden auf die affine Ebene und weiter auf die projektive Ebene, die ja die abgeschlossene Hülle der affinen Ebene ist. (Die abgeschlossene Hülle einer zusammenhängenden Menge ist immer zusammenhängend.) Damit hat man:

Eine lokalkompakte projektive Ebene ist entweder nulldimensional oder zusammenhängend und lokalzusammenhängend. Diese Eigenschaften kommen gleichzeitig mit der Ebene auch ihren Geraden zu.

Nun ergibt sich ganz einfach:

Eine zusammenhängende lokalkompakte projektive Ebene ist kompakt.

Nach dem früher Bewiesenen hat man dazu nur noch zu zeigen: Die Geraden einer zusammenhängenden lokalkompakten projektiven Ebene sind kompakt. Dazu betrachtet man eine kompakte Umgebung V eines Punktes p, die eine ganze Gerade G nicht trifft. Der Rand $rd\,V$ von V ist als abgeschlossene Teilmenge von V kompakt, und er enthält nicht den Punkt p. Nun wird behauptet: Projiziert man $rd\,V$ aus p auf die (nicht durch p gehende) Gerade G, so erhält man als Bild die ganze Gerade G. Es sei x ein beliebiger Punkt von G; dann muß also gezeigt werden, daß die Gerade $p \cup x$ mit $rd\,V$ wenigstens einen Punkt gemeinsam hat, der bei der Projektion in x übergeht. Nun schneiden die „ebenen" Umgebungen von p aus einer Geraden durch p die „linearen" Umgebungen von p in der Topologie der Geraden aus. Hätte der Rand von V mit $p \cup x$ keinen Punkt gemeinsam, so bedeutete das, daß es in der linearen Topologie auf $p \cup x$ eine randlose Umgebung von p gäbe, die aber nicht die ganze Gerade $p \cup x$ wäre. Dann wäre aber $p \cup x$ nicht zusammenhängend im Widerspruch zu dem vorherigen Satz. Also ist G und damit jede Gerade als stetiges Bild einer kompakten Menge kompakt.

§ 6. Kompaktheit angeordneter Ebenen

Eine Ebene heißt angeordnet, wenn auf ihren Geraden eine Trennbeziehung erklärt ist, die bei Projektionen erhalten bleibt. Dabei ist eine Trennbeziehung eine symmetrische Relation $ab|cd$ zwischen Paaren a, b und c, d von Punkten auf einer Geraden, die erklärt ist, wenn je zwei der vier Punkte verschieden sind, und die den folgenden Bedingungen genügt: Es gilt genau eine der drei Beziehungen $ab|cd$, $bc|ad$, $ca|bd$; aus $ab|cd$ folgt $ba|cd$; aus $ab|cd$ und $bc|de$ folgt $cd|ca$. In einer angeordneten projektiven Ebene macht man einen Ternärkörper zu einer angeordneten Menge, indem man, mit der Bezeichnung ∞ für den Punkt v, festsetzt:

$a < 0$ genau für $1a|0\infty$; $0 < a$ für $a \neq 0$ sonst;

falls $0 < a$, sei $a < b$ genau für $0b|a\infty$; $b < a$ für $b \neq a$ sonst;

falls $a < 0$, sei $b < a$ genau für $0b|a\infty$; $a < b$ für $b \neq a$ sonst.

Eine geordnete Menge wird zu einem topologischen Raum, wenn man als Umgebungen eines Punktes x die offenen Intervalle (a, b) nimmt, die den Punkt x enthalten, also die Mengen der z mit $a < z < b$, wenn $a < x < b$. Führt man in einer angeordneten projektiven Ebene auf diese Weise eine Topologie ein, so wird die Ebene dadurch zu einer topologischen projektiven Ebene im hier gebrauchten Sinne. Dazu muß man über das bei PICKERT [**1955**], S. 269 Bewiesene hinaus nur noch zeigen, daß es sich nicht um die diskrete

Topologie handeln kann. Wäre nämlich der Ternärkörper durch die Anordnung diskret topologisiert, so gäbe es ein Intervall (a, b), das nur das Element 0 enthielte. Das kann aber nicht sein; denn (s. z.B. PICKERT [**1955**], S. 234) es gibt in einer angeordneten Ebene zwischen je zwei Punkten einen (und damit sogar unendlich viele) weitere.

Mit Hilfe der Invarianz der Trennbeziehung gegenüber Projektionen kann man Monotoniegesetze für die multiplikative Loop herleiten und zwar gilt $ac<bc$ und $ca<cb$ genau dann, wenn $0<c$ und $a<b$ oder wenn $c<0$ und $b<a$ ist. Beweis. Die Multiplikation von rechts- bzw. von links mit einem festen Element $w \neq 0, \infty$ ist eine Projektivität der Geraden $0 \cup v$ und läßt also die Trennbeziehung ungeändert, d.h. $xy|z\infty$ ist gleichwertig mit $xw\ yw|zw\infty$ und ebenso mit $wx\ wy|wz\infty$. Im Fall $c<0<a<b$ gilt $1c|0\infty$ und $0b|a\infty$. Hieraus folgt $a\,ac|0\infty$ und $0\,bc|ac\infty$. Nun ist aber (s. z.B. PICKERT [**1955**], S. 226) $pq|0\infty$ dasselbe wie $p<0<q$ oder $q<0<p$. Wegen $0<a$ ist also $ac<0$ und damit $bc<ac$. Die anderen Fälle erledigen sich vollkommen analog, da die Negation der Trennbeziehung ebenso wie diese selbst invariant gegenüber Projektivitäten ist.

Für einen Ternärkörper einer topologischen projektiven Ebene ist die Abbildung $x \to x' = x \backslash 1$, ergänzt durch die Festsetzungen $0' = \infty\ (= v)$, $\infty' = 0$, als die durch die Hintereinanderausführung der Projektionen der Geraden $0 \cup v$ aus u auf die Gerade $e \cup v$, dieser aus 0 auf die Gerade $e \cup u$, weiter aus v auf die Gerade $0 \cup e$ und schließlich aus u zurück auf $0 \cup v$ entstehende Projektivität ein Homöomorphismus von $0 \cup v$. Man kann also die Umgebungen von ∞ mit Hilfe dieser Abbildung aus denen von 0 gewinnen. Um nun zu beweisen, daß aus der lokalen Kompaktheit der angeordneten Ebene (in der Ordnungstopologie) ihre Kompaktheit folgt, konstruiert man unter Ausnutzung der Monotonieeigenschaften der Multiplikation eine kompakte Umgebung von ∞ und eine solche von 0, die zusammen den um den Punkt ∞ vermehrten Ternärkörper überdecken. Dazu nimmt man eine Umgebung (a, b) von 0, deren abgeschlossene Hülle kompakt ist. Diese abgeschlossene Hülle besteht aus dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$, d.h. aus (a, b) und den hinzugenommenen Endpunkten a, b, da ja nach dem vorher Bemerkten der Ternärkörper dicht geordnet ist, also zwischen je zwei Elementen noch weitere liegen. Mit $[a, b]$ ist aber auch jedes Intervall $[ca, cb]$ für $0<c$ eine kompakte Umgebung von 0. Andererseits geht $[a, b]$ bei der Abbildung $x \to x'$ in eine kompakte Umgebung von ∞ über. Aus $0<x<b$ wird dabei $b'<x'$; denn x' ist definiert durch $xx'=1$, deswegen bedeutet $b'<x'$ dasselbe wie $xb'<1=bb'$. Dabei ist $0<b'$; denn $b'<0$ hätte $bb'=1<0$ zur Folge. Also ist $xb'<1$ weiter gleichwertig mit $x<b$. Entsprechend wird $a<x<0$ zu $x'<a'$. Es gibt also eine kompakte Umgebung von ∞ in der Form der Menge aller z mit $z \leqq a'$ oder $b' \leqq z$. Es gilt, nun noch ein Element c zu finden, so daß $(a', b') \subseteq [ca, cb]$. Dazu wählt man zuerst ein Hilfselement d mit $0<d$, so daß da gleich einem beliebigen Element $h<a'$ wird und dann c mit $d<c$, so daß $b'<cb$. Damit hat man die Kompaktheit der Geraden $0 \cup v$ bewiesen und es hat sich ergeben:

Ist eine angeordnete projektive Ebene lokalkompakt in der Ordnungstopologie, so ist sie kompakt.

Weiter folgt in diesem Fall noch:

Ist eine angeordnete projektive Ebene lokalkompakt in der Ordnungstopologie, so ist sie archimedisch angeordnet.

Hierfür ist zu zeigen, daß die additive Loop jedes Ternärkörpers der Ebene archimedisch angeordnet ist, daß also für beliebige Elemente a, b aus $0<a<b$ oder $b<a<0$ die Existenz einer natürlichen Zahl n folgt, für die $b<a\cdot n$ bzw. $a\cdot n<b$ gilt, wobei $a\cdot n$ rekursiv definiert ist durch $a\cdot 1=a$, $a\cdot(n+1)=a\cdot n+a$. Im ersten Fall $0<a<b$ ergibt sich die Existenz einer solchen Zahl n so: Wäre niemals $b<a\cdot n$, so wäre $a\cdot n\in[0,b]$ für jedes n. Nun ist $[0,b]$ aber kompakt, wie vorher für ein beliebiges abgeschlossenes Intervall gezeigt wurde. Also hätte die Folge $a\cdot n$ einen Häufungspunkt c in $[0,b]$. Außerdem ist die Folge $a\cdot n$ (wegen der Monotoniegesetze der Addition) monoton, und daher hätte man dann sogar die Konvergenz $\lim\limits_{n\to\infty} a\cdot n=c$. Daraus folgte $\lim\limits_{n\to\infty} a\cdot n+a=\lim\limits_{n\to\infty} a\cdot(n+1)=c+a$. Die Folgen $a\cdot n$ und $a\cdot(n+1)$ müssen aber den gleichen Grenzwert haben. Dann müßte $c=c+a$ sein und $a=0$. Das ist ein Widerspruch. Im zweiten Fall schließt man analog.

Im bisherigen ersten Teil der Arbeit wurden an den Ternärkörper nur topologische oder allenfalls ordnungstheoretische Forderungen gestellt, aber keinerlei besondere algebraische Rechenregeln für die ternäre Verknüpfung verlangt, die sich geometrisch durch gewisse Schließungssätze ausdrücken. Das soll nun im zweiten Teil der Arbeit geschehen, und zwar werden diese geometrischen Schließungssätze der einfacheren Formulierung halber meist in ihrer algebraischen Form für einen Ternärkörper ausgesprochen. Die Übersetzung in die geometrische Redeweise findet man bei PICKERT [**1955**]. Man kann dann einmal fragen, inwieweit sich bei hinreichender „Anständigkeit" des Ternärkörpers weitere Folgerungsbeziehungen zwischen topologischen Eigenschaften der Ebene ergeben. Ein Beispiel hierfür bietet die Frage nach der Kompaktheit lokalkompakter Ebenen und nach ihren möglichen topologischen Dimensionen. Zum anderen kann man auch unter topologischen Voraussetzungen nach engeren Abhängigkeiten der Rechenregeln voneinander fragen, als sie für Ternärkörper ohne Topologie bestehen. Besonders starke derartige Verbindungen werden sich ergeben, wenn die Geraden der Ebene homöomorph zu einer reellen projektiven Geraden sind. Schließlich läßt sich auch noch die Frage nach der Einbettbarkeit topologischer Ternärkörper in topologische projektive Ebenen, d.h. nach der Existenz solcher Ebenen, die einen zu dem gegebenen topologischen Ternärkörper stetig isomorphen Ternärkörper haben, weiter fördern. Bisher kannte man die Antwort darauf in zwei Extremfällen, nämlich für die (algebraisch besonders „anständigen") Schiefkörper und für die (topologisch „anständigen") zusammenhängenden lokalkompakten Ternärkörper: Jeder topologische Schiefkörper läßt sich als Ternärkörper einer eindeutig bestimmten topologischen (desarguesschen)

projektiven Ebene auffassen (s. z.B. PICKERT [**1955**], S. 265). Jeder zusammenhängende lokalkompakte Ternärkörper gehört ebenso zu einer eindeutig bestimmten topologischen projektiven Ebene (SKORNJAKOV [**1954**]).

§ 7. Kompaktheit spezieller lokalkompakter Ebenen

Um in einer lokalkompakten projektiven Ebene die Kompaktheit der Geraden (und damit auch der Ebene) beweisen zu können, muß man eine Möglichkeit haben, genügend große kompakte Mengen angeben zu können, man muß also etwa die kompakten Umgebungen eines Punktes hinreichend stark „aufblähen" können. Das legt den folgenden Ansatz nahe: Man betrachtet für einen Punkt p, der nicht auf der Geraden G liegt, die Gruppe der (p, G)-Kollineationen. Kollineation soll eine eineindeutige Selbstabbildung der Ebene heißen, welche auch die Gesamtheit der Geraden (aufgefaßt als Punktmengen) umkehrbar eindeutig in sich überführt, (p, G)-Kollineation eine solche, die jede Gerade durch p und jeden Punkt auf G einzeln festläßt. Für die Gruppe der (p, G)-Kollineationen soll verlangt werden, daß sie auf den von p verschiedenen und nicht auf G liegenden Punkten einer jeden Geraden durch p transitiv sei. Diese (p, G)-Transitivität der Ebene bedeutet genau die Gültigkeit des desarguesschen Schließungssatzes mit Zentrum p und Achse G (s. z.B. PICKERT [**1955**], S. 76). Wählt man $p = 0$ und $G = u \cup v$, so hat die (p, G)-Transitivität der Ebene die Assoziativität der Multiplikation eines zu $0, u, v$ gehörigen Ternärkörpers zur Folge (PICKERT [**1955**], S. 104). Es zeigt sich, daß man für den Beweis der Kompaktheit von $0 \cup v$ mit einer viel schwächeren Voraussetzung auskommt: Die multiplikative Loop eines Ternärkörpers soll eine Alternativloop sein, d.h. je zwei Elemente der Loop sollen in einer assoziativen Unterloop (einer Untergruppe der Loop) liegen. Dann kann man sich wieder der Abbildung $x \to x' = x \backslash 1$ bedienen, um den um das Element $\infty = v$ vermehrten Ternärkörper mit zwei kompakten Mengen zu überdecken. Man geht dabei aus von einer kompakten Umgebung W von 0. Diese liefert bei dem Homöomorphismus $x \to x'$ eine kompakte Umgebung W' von ∞. Um jetzt die kompakte Menge W durch Multiplikation mit irgendeinem Element so zu strecken, daß sie das Komplement von W' umfaßt, sucht man erst einmal ein Element a mit der Eigenschaft, daß W echt in aW enthalten ist. Das besagt aber nichts anderes, als daß $a^{-1}W$ echt in W enthalten sein soll; denn aus $w = av$ folgt, daß w der von a und v erzeugten Loop angehört, also mit a und v zusammen in einer Gruppe liegt. Daher ist $w = av$ gleichwertig mit $a^{-1}w = v$ und $W \subset aW$ gleichwertig mit $a^{-1}W \subset W$. Ein a, das diese Forderung erfüllt, kann man aber leicht finden, da es ja, wie schon in § 3 bewiesen, zu jeder beliebig kleinen Umgebung U von 0 eine Umgebung V von 0 mit $VW \subseteq U$ gibt. Man braucht dann für $U \subset W$ nur $a = v^{-1}$ für ein von 0 verschiedenes Element v von V zu setzen. Jetzt ergibt sich durch eine Induktion, daß die Mengen $a^n W$ eine aufsteigende Folge von kompakten Umgebungen von 0 bilden. Da nämlich $a(a^n W)$ die Gesamtheit der Elemente $a(a^n w) = a^{n+1} w$ mit w in W ist, gilt $a(a^n W) = a^{n+1} W$ und aus $W \subset aW$ folgt durch wiederholte Multiplikation mit a von links $a^n W \subset a^{n+1} W$

für jedes n. Als homöomorphes Bild von W sind alle Mengen $a^n W$ kompakt. In der Folge dieser Mengen gibt es eine, die das Komplement von W' umfaßt; denn wäre das nicht der Fall, so könnte man für jedes n ein Element b_n finden, welches weder in $a^n W$ noch in W' läge. Für die zweite Bedingung kann man auch $b_n^{-1} \notin W$ schreiben, sie hätte also zur Folge, daß sich die b_n^{-1} nicht gegen 0 häufen könnten. Unter Berücksichtigung der Gruppeneigenschaft der von a und einem b_n erzeugten Loop bedeutet $b_n \notin a^n W$ dasselbe wie $a^{-n} b_n \notin W$. Nun hat aber die über a gemachte Voraussetzung die Konvergenz von a^{-n} gegen 0 zur Folge. Es ist nämlich $a^{-n} W \subset W$ für alle n, insbesondere liegen also alle a^{-n} in der kompakten Menge $W w^{-1}$, wenn man für w irgendein von 0 verschiedenes Element aus W nimmt. Daher müssen die a^{-n} einen Häufungspunkt haben. Die Annahme, es gäbe einen solchen Häufungspunkt $c \neq 0$ führt auf einen Widerspruch: Gäbe es eine Teilfolge $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ der n, für welche $\lim_{i \to \infty} a^{-n_i} = c \neq 0$ wäre, so wäre $\lim_{i \to \infty} a^{-n_{2i}} a^{n_i} = c c^{-1} = 1$ und die a^{-n} häuften sich auch gegen 1. Dann häuften sich aber die $a^{-n} w$ für jedes w aus W in w und jedes solche w läge als Häufungspunkt von Punkten aus der abgeschlossenen Menge $a^{-1} W$ selbst in $a^{-1} W$ im Widerspruch dazu, daß $a^{-1} W$ eine echte Teilmenge von W sein sollte. Jetzt kann man aus der ersten Bedingung über die b_n folgern, daß doch $\lim_{n \to \infty} b_n^{-1} = 0$ gelten müßte und damit ist dann gezeigt, daß es solche b_n überhaupt nicht geben kann. Für jedes feste n ist nämlich $\lim_{p \to \infty} a^{-p} b_n = 0$; für hinreichend große p liegt also $a^{-p} b_n$ in W. Es sei p_n die kleinste Zahl, für die das der Fall ist. Nach Konstruktion ist $p_n > n$, und $a^{-p_n} b_n$ kann nicht zu $a^{-1} W$ gehören, weil sonst p_n nicht minimal wäre. Daher liegen die $a^{-p_n} b_n$ alle in der Menge $W - a^{-1} W$, deren abgeschlossene Hülle K kompakt ist und den Punkt 0 nicht enthält ($a^{-1} W$ ist ja eine Umgebung von 0). Bei dem Übergang von x zu $x' = x^{-1}$ geht also K in die kompakte Teilmenge K' des Ternärkörpers T über. Es ist $b_n^{-1} \in K' a^{-p_n}$ und diese Mengen liegen schließlich in beliebig kleinen Umgebungen von 0, da K' kompakt und $\lim_{n \to \infty} a^{-p_n} = 0$ ist, also die $K' a^{-p_n}$ nach dem Beweis in § 3 einen gegen 0 konvergenten Filter bilden. Damit hat man bewiesen:

Ist die multiplikative Loop eines Ternärkörpers einer lokalkompakten projektiven Ebene eine Alternativloop oder ist insbesondere die Ebene (p, G)-transitiv für ein nicht inzidentes Paar p, G, so ist die Ebene kompakt.

§ 8. Topologisches Lemma

Für das Folgende wird ein topologisches Lemma gebraucht. Es bezeichne R den Raum der reellen Zahlen, S den Raum der reellen Zahlen modulo 1, also die eindimensionale Sphäre, n eine natürliche Zahl und q eine natürliche Zahl oder ∞; $T = R^n \times S^q$ sei das topologische Produkt von n Faktoren R und q Faktoren S.

Dann ist die Kompaktifizierung $T + \infty$ von T durch einen Punkt ∞ nicht homogen.

Beweis. T ist lokalkompakt, aber wegen $n \geqq 1$ nicht kompakt. Daher läßt es sich auf genau eine Weise durch einen Punkt ∞ kompakt abschließen, und zwar so, daß man die Komplemente der kompakten Teilmengen von T in $T + \infty$ als Basis für den Umgebungsfilter in ∞ nimmt (BOURBAKI [**1951**], Top. gén. I, § 10, Th. 3). Jede kompakte Menge in R^n ist für ein geeignetes positives k in einer n-dimensionalen Kugel $K_n(k)$ vom Radius k enthalten, also jede kompakte Menge in T in einer geeigneten Menge $K_n(k) \times S^q$. Das Komplement von $K_n(k)$ in R^n hat die Form $(k, \infty) \times S_{n-1}$, wobei (k, ∞) das offene Intervall aller reellen Zahlen $> k$ bedeutet und S_{n-1} die $(n-1)$-dimensionale Sphäre. Die Mengen

$$U_k = (k, \infty) \times S_{n-1} \times S^q + \infty \quad (k \geqq 1)$$

bilden also eine Basis für den Umgebungsfilter von ∞ bei der kompakten Abschließung von T durch ∞. Um die Inhomogenität nachzuweisen, vergleicht man die Umgebungsfilter in $0 = 0^n \times 0^q$ und ∞. Die Gesamtheit der Mengen

$$V = V(t, p) = (-t, t)^{n+p} \times S^r \quad (0 < t < \tfrac{1}{2},\ p \geqq 1,\ p + r = q)$$

bildet eine Basis für den Umgebungsfilter in 0. Die Homogenität von $T + \infty$ würde insbesondere die Existenz eines Homöomorphismus σ bedeuten, der 0 in ∞ überführt. Dann muß es eine geeignete Menge V mit $V^\sigma \subseteqq U_1$ geben und eine Zahl k mit $U_k \subseteqq V^\sigma$. Wegen $0^\sigma = \infty$ gilt dann auch noch zwischen den punktierten Mengen die Einschachtelung

$$U_k - \infty \subseteqq (V - 0)^\sigma = V^\sigma - \infty \subseteqq U_1 - \infty.$$

Hieraus ergibt sich bei Betrachtung der Homotopieverhältnisse ein Widerspruch: Es sei $c > k$. Dann ist die Abbildung

$$x \to x^\gamma = c \times x \times 0^q$$

eine topologische Abbildung der $(n-1)$-Sphäre S_{n-1} in $U_k - \infty$. Das Bild S^γ_{n-1} ist in $U_1 - \infty$ nicht zusammenziehbar; denn eine Abbildung in einen Produktraum liefert genau dann ein zusammenziehbares Bild, wenn die Projektionen auf die Komponenten des Produktraumes zusammenziehbar sind. Die Projektion der Abbildung γ auf die Komponente S_{n-1} von $U_1 - \infty$ ist aber die identische Abbildung und eine Sphäre ist in sich nicht zusammenziehbar (KURATOWSKI [**1952**], S. 277; ALEXANDROFF-HOPF [**1935**], S. 513). Dagegen kann man S^γ_{n-1} in der vollen Umgebung U_k auf den Punkt ∞ zusammenziehen. Sei nämlich $x^{\gamma(s)} = c\,s \times x \times 0^q$ $(s \geqq 1)$. Dann hängt $x^{\gamma(s)}$ stetig von x und s ab, und für $s \to \infty$ liegt $S^{\gamma(s)}_{n-1}$ schließlich in jeder Umgebung U_m von ∞. Daher ist S^γ_{n-1} erst recht in der größeren Menge V^σ zusammenziehbar. Nun hat aber die zu $R^{n+p} \times S^r$ homöomorphe Menge V^σ die Eigenschaft, daß jede in ihr gelegene zusammenziehbare $(n-1)$-Sphäre zusammenziehbar bleibt, wenn man aus V^σ einen nicht auf ihr gelegenen Punkt

herausnimmt. Sei nämlich φ die topologische Abbildung von S_{n-1} in $R^{n+p} \times S^r$ und $0^{n+p} \times 0^r = 0 \times 0$ der herauszunehmende Punkt; χ sei die Projektion von φ auf den Faktor R^{n+p}, ψ die Projektion auf S^r. Da 0×0 nicht auf S^{φ}_{n-1} liegen soll, ist $x^{\chi} \neq 0$ oder $x^{\psi} \neq 0$ für jeden Punkt x von S_{n-1}. Wegen der Umkehrbarkeit von φ ist außerdem $x^{\chi} \neq y^{\chi}$ oder $x^{\psi} \neq y^{\psi}$ für je zwei verschiedene Punkte x, y von S_{n-1}. Daher wird die Teilmenge N aller Punkte x von S_{n-1} mit $x^{\psi} = 0$ durch χ umkehrbar eindeutig und stetig in $R^{n+p} - 0$ abgebildet. N^{χ} ist eine höchstens $(n-1)$-dimensionale kompakte Teilmenge des punktierten mindestens $(n+1)$-dimensionalen euklidischen Raumes $R^{n+p} - 0$, läßt sich also dort auf einen Punkt zusammenziehen (ALEXANDROFF-HOPF [**1935**], S. 399, 405). Mit I als Bezeichnung für das abgeschlossene Intervall der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 wird diese Zusammenziehung beschrieben durch eine stetige Abbildung α von $N \times I$ in $R^{n+p} - 0$, die auf $N \times 0$ in natürlicher Weise mit χ übereinstimmt und auf $N \times 1$ den Wert $a \neq 0$ annimmt. α läßt sich zu einer stetigen Abbildung β von $S_{n-1} \times I$ in R^{n+p} fortsetzen, die noch auf $S_{n-1} \times 0$ die Abbildung χ darstellt. Zieht man nun weiter die kompakte Menge $(S_{n-1} \times 1)^{\beta}$ im Raum R^{n+p} unter Festhalten des Punktes a stetig auf a zusammen, so hat man insgesamt die Menge S^{χ}_{n-1} in R^{n+p} stetig in den Punkt a übergeführt, ohne daß dabei ein Punkt aus N^{χ} durch 0 hindurchgegangen wäre. Anschließend kann man wegen der vorausgesetzten Zusammenziehbarkeit der Sphäre S^{φ}_{n-1} ihre Projektion S^{ψ}_{n-1} im Raum S^r stetig in einen Punkt b überführen. Diese beiden Deformationen hintereinander ergeben eine Zusammenziehung von S^{φ}_{n-1} auf den Punkt $a \times b$, die ganz in dem punktierten Raum $R^{n+p} \times S^r - 0 \times 0$ vor sich geht.

Damit ist die Bemerkung über die Zusammenziehbarkeit der $(n-1)$-Sphären in V^{σ} bewiesen, d. h. S^{σ}_{n-1} ist zusammenziehbar in $V^{\sigma} - \infty$ und hieraus würde erst recht die Zusammenziehbarkeit in der umfassenderen Menge $U_1 - \infty$ folgen. Dieser Widerspruch beweist die Inhomogenität von $T + \infty$.

Bemerkung. In dem Sonderfall $n = 1$ läßt sich dieser Beweis viel einfacher führen. Dann besteht nämlich $S_{n-1} = S_0$ aus einem Punktepaar. Die Mengen $U_k - \infty$ haben daher genau zwei zusammenhängende Komponenten und jede Komponente von $U_1 - \infty$ enthält eine Komponente von $U_k - \infty$. Andererseits ist $(V-0)^{\sigma}$ zusammenhängend, also ganz in einer Komponente von $U_1 - \infty$ enthalten. Diese beiden Tatsachen zusammen widersprechen der Einschachtelung $U_k - \infty \subseteq (V-0)^{\sigma} \subseteq U_1 - \infty$.

§ 9. Die topologische Dimension lokalkompakter projektiver Ebenen

Das topologische Lemma soll nun ausgenutzt werden, um Aussagen über die topologische Dimension gewisser lokalkompakter projektiver Ebenen und über die Struktur ihrer additiven Loop zu machen. Für einen regulären Raum mit abzählbarer Basis (und ein solcher liegt ja bei einer lokalkompakten Ebene vor) wird die topologische Dimension rekursiv erklärt. Genau die leere Menge soll (-1)-dimensional sein, und ein Raum soll die Dimension

haben, wenn jeder seiner Punkte eine Basis von Umgebungen mit $(n-1)$-dimensionalem Rand hat, aber nicht jeder Punkt eine solche mit $(n-2)$-dimensionalem Rand. Die anderen geläufigen Definitionen für eine topologische Dimension stimmen bei der betrachteten Raumklasse mit der hier gegebenen überein (HUREWICZ-WALLMANN [**1948**]). Für die nicht zusammenhängenden lokalkompakten Ebenen war in § 5 gezeigt worden, daß sie die Dimension 0 haben. Betrachtung der bekannten zusammenhängenden lokalkompakten Ebenen (etwa mit dem reellen oder komplexen Zahlkörper als Ternärkörper) läßt die Vermutung aufkommen, daß die Dimension dieser Ebenen eine endliche gerade Zahl sein muß. Da es beispielsweise einen eindimensionalen topologischen Raum gibt, dessen Produkt mit sich selbst wieder die Dimension 1 hat (ERDÖS [**1940**]), ist es auch bei endlicher Dimension einer topologischen Ebene nicht selbstverständlich, daß ihre Dimension gerade ist. Für beliebige lokalkompakte Ebenen ist die Vermutung noch nicht bestätigt, wohl aber gelingt das unter der Zusatzvoraussetzung, daß die Ebene einen Ternärkörper hat, dessen additive Loop eine kommutative Gruppe ist. Es handelt sich dann also um eine lokalkompakte kommutative Gruppe, die nach dem in § 5 und § 3 Bewiesenen zusammenhängend und lokalzusammenhängend ist und eine abzählbare Basis besitzt. Die Struktur dieser Gruppen ist vollständig bekannt (PONTRJAGIN [**1946**]). Mit R als der additiven Gruppe der reellen Zahlen und S als der additiven Gruppe der reellen Zahlen modulo 1 ist die additive Gruppe des Ternärkörpers das direkte Produkt von endlich vielen Faktoren R und höchstens abzählbar vielen Faktoren S, d.h. $T = R^n \times S^q$. Hierbei ist zunächst $0 \leq q \leq \omega_0$ und n eine natürliche Zahl; denn wäre $n = 0$, so entfiele der erste Bestandteil des direkten Produktes und T wäre als das Produkt der kompakten Mengen S selbst kompakt. Das kann aber nicht sein, da sonst der Punkt ∞, der T zur projektiven Geraden ergänzt, als Komplement einer kompakten und daher abgeschlossenen Menge offen wäre und somit die projektive Gerade in einem und daher in allen Punkten diskret, was von vornherein ausgeschlossen war. Nun ist aber die projektive Gerade $T + \infty$ ein homogener topologischer Raum, also kann nach dem topologischen Lemma nicht auch $0 < q$ sein, d.h. es folgt $q = 0$. Damit ist bewiesen:

Ist die additive Loop eines Ternärkörpers einer lokalkompakten zusammenhängenden projektiven Ebene eine kommutative Gruppe, so ist sie für eine geeignete natürliche Zahl n das n-fache direkte Produkt der additiven Gruppe der reellen Zahlen. Die projektive Ebene hat dann die topologische Dimension 2n.

Insbesondere gibt es also dann in der additiven Gruppe außer der 0 keine Elemente endlicher Ordnung und das ergibt eine Folgerung über Antifanoebenen, das sind solche Ebenen, in denen jedes vollständige Viereck kollineare Diagonalpunkte hat. In einer solchen Ebene erfüllt jedes Element x der additiven Loop die Gleichung $x + x = 0$ und hieraus folgt das kommutative und assoziative Gesetz für die Addition (PICKERT [**1955**], S. 60). Also:

Eine lokalkompakte Antifanoebene ist notwendig nulldimensional.

§ 10. Projektive Ebenen, die zur reellen projektiven Ebene homöomorph sind

Die erste Frage, die sich bei zur reellen Ebene homöomorphen projektiven Ebene erhebt, ist die, ob ihre Geraden auch zur reellen Geraden homöomorph sind. Diese Frage ist zu bejahen. Beweis. Zunächst weiß man aus § 5, daß die projektiven Geraden einer zur reellen Ebene homöomorphen Ebene zusammenhängende und lokalzusammenhängende Mengen sind, denen als abgeschlossenen Teilmengen eines kompakten Raumes mit abzählbarer Basis dieselben Eigenschaften zukommen. Von einem solchen Raum weiß man (KURATOWSKI [**1952**], S. 184), daß er sogar lokal kurvenmäßig zusammenhängend ist, d.h. es gibt (beliebig kleine) Umgebungen eines Punktes x, so daß jeder Punkt y einer solchen Umgebung mit x durch eine zu dem reellen Intervall $I=[0,1]$ homöomorphe Menge (d.i. eine einfache Kurve) in dieser Umgebung verbunden ist. Die doppelte Transitivität der Homöomorphismengruppe der affinen Geraden ergibt daraus sofort, daß in der affinen Geraden je zwei Punkte durch eine einfache Kurve verbunden sind. Es wird sich jetzt sogar zeigen, daß diese einfache Kurve eindeutig bestimmt ist. Gäbe es nämlich zwei verschiedene einfache Kurven, die zwei Punkte miteinander verbinden, so erhielte man nach Weglassen geeigneter Kurvenstücke eine einfache geschlossene Kurve, d.h. eine Jordan-Kurve in der affinen Geraden. Diese Jordan-Kurve läßt sich nun innerhalb der affinen Geraden auf einen Punkt zusammenziehen, und zwar durch eine Schar von (bis auf den Schluß) homöomorphen Abbildungen. Sei nämlich die Jordan-Kurve dargestellt durch $a(s)$ $(s\in S)$ und eine die Punkte 0 und 1 verbindende einfache Kurve durch $b(t)$ $(t\in I)$ mit $b(0)=1$ und $b(1)=0$. Dann ist $c_t(s)=a(s)\,b(t)$ stetig in s, t und $c_0(s)=a(s)$, $c_1(s)=0$. Da nun die betrachtete Ebene lokaleuklidisch ist, liegt eine hinreichend kleine Jordan-Kurve der affinen Geraden ganz in einer offenen euklidischen Kreisscheibe, teilt diese also in ein Inneres und ein Äußeres. Wegen der Zusammenziehbarkeit der Jordan-Kurve in der affinen Geraden muß das Innere der Jordan-Kurve ganz der affinen Geraden angehören, dann wäre aber die Gerade zweidimensional und die Ebene vierdimensional, ein Widerspruch.

Spricht man dieses Zwischenergebnis, daß in der affinen Geraden je zwei Punkte eindeutig durch eine einfache Kurve verbunden sind, projektiv aus, so erhält man die Aussage: Zu drei (paarweise verschiedenen) Punkten p, q, r gibt es in der projektiven Geraden genau eine einfache Kurve K mit den Endpunkten p, q, welche r nicht enthält. Ist 0 irgendein von p und q verschiedener Punkt aus K, so gibt es auch genau eine einfache Kurve L mit den Endpunkten p, q, die 0 nicht enthält. Diese muß dann durch r und ebenso natürlich durch jeden anderen nicht auf K gelegenen Punkt hindurchgehen. Die beiden einfachen Kurven K und L füllen also zusammen die ganze projektive Gerade aus. Sie haben aber nur die Endpunkte p, q gemeinsam, denn gäbe es einen von p, q verschiedenen Punkt x, der zugleich K und L angehörte, so müßte die einfache Kurve M, die p mit q verbindet und x nicht enthält, sowohl durch 0 wie durch r hindurchgehen, da sie ja von K und L

verschieden ist. Nun gibt es eine Projektivität, die 0 mit p und r mit q vertauscht (man kann sie leicht durch Hintereinander-Ausführung von drei Projektionen angeben). Diese würde aus M eine einfache Kurve mit den Endpunkten $0, r$ machen, die p und q enthielte. Weglassen der Endstücke ergäbe eine einfache Kurve von p nach q, die weder durch 0 noch durch r hindurchginge, also wieder von K und L verschieden wäre. Eine solche kann es aber nicht geben. Damit ist gezeigt, daß die projektive Gerade eine einfache geschlossene Kurve ist, also:

Die projektiven Geraden einer zur reellen Ebene homöomorphen projektiven Ebene sind eindimensionale Sphären, die affinen Geraden sind homöomorph zur Menge der reellen Zahlen.

§ 11. Topologische Loops, die zur reellen Geraden homöomorph sind

Ist ein Ternärkörper homöomorph zur reellen Geraden, so bestehen zwischen den in ihm möglichen Rechenregeln engere Abhängigkeiten, als bei anderen lokalkompakten Ternärkörpern. Das wird dadurch bedingt, daß die von den reellen Zahlen übertragene Anordnung in gewisser Weise mit den Ternärkörper-Verknüpfungen verträglich ist. Zunächst werde nur die additive Loop betrachtet. Von ihr soll vorausgesetzt werden, daß jedes ihrer Elemente eine assoziative Untergruppe der Loop erzeugt; eine solche Loop nennt man auch potenzassoziativ (im Gedanken an multiplikativ geschriebene Loops). In Anlehnung an Bourbaki ([**1947**], Top. gén. V, § 2) ergibt sich, daß eine solche zur Menge der reellen Zahlen homöomorphe topologische Loop angeordnet und sogar archimedisch angeordnet ist. Daß es sich um eine angeordnete Loop handelt, bedeutet, daß aus $x<y$ folgt $x+z<y+z$ und $z+x<z+y$. Dabei werde die Beziehung $x>0$ durch den Homöomorphismus von den reellen Zahlen her übertragen und $x<y$ definiert durch $y-x>0$, wobei $y-x$ dasjenige Element der Loop sein soll, das $(y-x)+x=y$ erfüllt. Dann ist die durch $f(z)=(y+z)-(x+z)$ gegebene Abbildung f, da die Loopoperationen ja stetig sind, eine stetige Funktion. Im Fall $x<y$ ist $f(0)>0$ und $f(z)\neq 0$ für jedes z, da ja $f(z)=0$ dasselbe bedeutet wie $y+z=x+z$ oder $y=x$. Nun bildet f die (zusammenhängende) Loop auf eine zusammenhängende Punktmenge ab, die ein Element >0 enthält, aber nicht die 0 selbst, also nur aus Elementen >0 besteht. Damit ist die Rechtsmonotonie der Addition bewiesen. Jetzt folgen nachträglich auch die Anordnungsgesetze für die Beziehung $<$. Die Linksmonotonie ergibt sich ganz analog. Für eine natürliche Zahl n wird $a\cdot n$ induktiv definiert durch $a\cdot 1=a$, $a\cdot(n+1)=a\cdot n+a$. Ist $0<a$ und $0<b$ und wäre $a\cdot n\leqq b$ für jedes n, so konvergierte die monoton wachsende Folge $\{a\cdot n\}_{n=1}^{\infty}$ gegen ein Element $c\leqq b$ und dann müßte die Folge $\{a\cdot(n+1)\}_{n=1}^{\infty}$ sowohl gegen c wie auch gegen $c+a$ konvergieren. Also gibt es Zahlen n mit $a\cdot n>b$. Entsprechendes gilt für $b<a<0$, d.h. die Loop ist archimedisch angeordnet.

Jetzt läßt sich in Verschärfung des Satzes von Pickert [**1955**], S. 246 beweisen:

Eine archimedisch angeordnete potenzassoziative Loop ist isomorph zu einer Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen.

Der Beweis entspricht dem bei BOURBAKI [**1947**], Top. gén. V, § 2 für Gruppen gegebenen. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden. Im ersten Fall gibt es ein Element e, das unmittelbarer Nachfolger von 0 ist. Dann folgt durch eine naheliegende Induktion, daß $e \cdot (n+1)$ unmittelbarer Nachfolger von $e \cdot n$ ist für jedes ganze n und wegen der archimedischen Anordnung erschöpfen die Elemente $e \cdot n$ die ganze Loop, die also isomorph zur Gruppe der ganzen Zahlen ist. Im zweiten Fall gibt es keinen unmittelbaren Nachfolger von 0 und die Loop ist dicht geordnet. Für Elemente $x>0$ und beliebige y werde $y:x$ als die größte (positive und negative) ganze Zahl n mit $x \cdot n \leqq y$ erklärt. Wählt man noch ein festes Element $e>0$, so ist

$$a^{\varrho} = \lim_{x \to 0} \frac{a:x}{e:x}$$

für jedes Element a vorhanden und >0 genau für $a>0$, wie eine leichte, für $a>0$ und $a<0$ getrennt durchzuführende Rechnung zeigt, die genau mit der bei BOURBAKI angegebenen übereinstimmt. Wegen $a:x+b:x \leqq (a+b):x \leqq a:x+b:x+2$ ist ϱ ein Homomorphismus der Loop in die additive Gruppe der reellen Zahlen, und da aus $a<b$ die Existenz eines Elementes $c>0$ mit $a+c=b$, also $a^{\varrho}+c^{\varrho}=b^{\varrho}$ und $a^{\varrho}<b^{\varrho}$ folgt, ist ϱ sogar ein Isomorphismus. Weiter gilt:

Eine zur Gruppe der reellen Zahlen homöomorphe potenzassoziative Loop ist sogar mit ihr isomorph;

denn die Gruppe der reellen Zahlen hat keine zusammenhängende echte Untergruppe.

§ 12. Zur reellen Ebene homöomorphe Translationsebenen

Eine Ebene, in der nach Auszeichnung einer uneigentlichen Geraden die Translationen transitiv sind auf der Menge der eigentlichen Punkte, heißt Translationsebene. Ihr Ternärkörper (T, τ) (mit u, v auf der uneigentlichen Geraden) ist ein Quasikörper, d.h. außer den Auflösbarkeitsbedingungen gilt $\tau(s, x, t) = sx+t$, mit der Addition bildet T eine Gruppe und es ist stets $a(b+c)=ab+ac$. Nun gilt:

Eine zur reellen Ebene homöomorphe Translationsebene ist mit der reellen Ebene isomorph.

Beweis. Die additive Gruppe des Quasikörpers stimmt mit der additiven Gruppe des reellen Körpers überein. Kern des Quasikörpers nennt man die Menge aller Elemente x, die $(ab)x=a(bx)$ und $(a+b)x=ax+bx$ für alle Paare a, b erfüllen. Der Kern eines Quasikörpers ist ein Schiefkörper, der das Element 1 enthält. Wegen der Stetigkeit der Abbildungen $x \to (ab)x - a(bx)$ und $x \to (a+b)x-(ax+bx)$ ist der Kern eines topologischen Quasikörpers als Durchschnitt von Urbildern der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ abgeschlossen. Mit 1 liegt nun der ganze von 1 erzeugte Körper der rationalen Zahlen (die

Charakteristik ist 0 wegen der Anordnung) im Kern. Diese Menge liegt aber überall dicht in dem Quasikörper, der daher mit seinem Kern übereinstimmt und der Körper der reellen Zahlen ist.

§ 13. Zur reellen Ebene homöomorphe Neokörperebenen

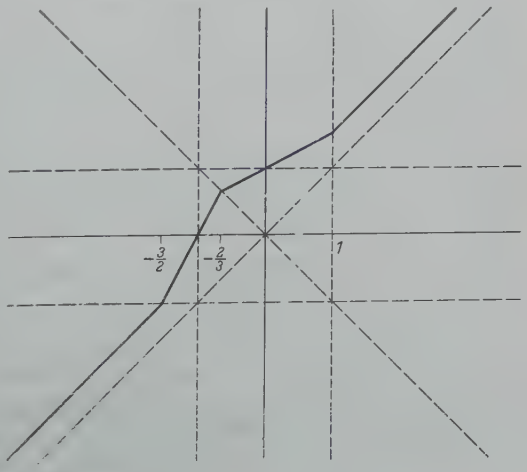
Nach dem Ergebnis der beiden letzten Paragraphen genügt [neben der „Zerlegbarkeitsbedingung" $\tau(s, x, t) = sx + t$] schon die Forderung der Potenzassoziativität der Addition und das eine Distributivgesetz, um für einen zum Körper der reellen Zahlen homöomorphen Ternärkörper zu erzwingen, daß er mit diesem isomorph ist. Auf die Forderung der Potenzassoziativität der Addition kann man dabei auch dann nicht verzichten, wenn man sehr viel stärkere Bedingungen für die Multiplikation voraussetzt, wie das folgende Beispiel zeigt:

Es gibt einen zur Menge der reellen Zahlen homöomorphen echten kommutativen (planaren) Neokörper mit kommutativer und kürzbarer Addition.

Als Neokörper wird dabei ein Ternärkörper (T, τ) bezeichnet mit $\tau(s, x, t) = sx + t$ und assoziativer und beiderseits distributiver Multiplikation. Ein kommutativer Neokörper erfüllt außerdem noch das kommutative Gesetz der Multiplikation. Die Kürzbarkeit bedeutet bei kommutativer Addition die Gültigkeit von $(-x) + (x + y) = y$. Mit dem Beispiel ist gleichzeitig die Frage von Pickert [**1956**] nach der Existenz echter Neokörper mit Kürzungsregel beantwortet. Das Beispiel ergibt sich durch geeignete Anwendung des Gedankens von Moulton [**1902**], die Geraden der gewöhnlichen reellen Ebene durch passende geknickte Linien zu ersetzen. Man erhält es dadurch, daß man die Multiplikation des reellen Körpers beibehält und eine neue Addition $\oplus$ einführt durch die Definition

$$\begin{aligned} x \oplus t &= x + \tfrac{1}{2}t \quad \text{für} \quad t^{-1}x \leqq -\tfrac{3}{2} \quad \text{oder} \quad t^{-1}x \geqq 1 \\ &= \tfrac{1}{2}x + t \quad \text{für} \quad -\tfrac{2}{3} \leqq t^{-1}x \leqq 1 \\ &= 2x + 2t \quad \text{für} \quad -\tfrac{3}{2} \leqq t^{-1}x \leqq -\tfrac{2}{3}. \end{aligned}$$

Man sieht sofort, daß die neue Addition kommutativ ist und rechnet leicht $(-1) \oplus (1 \oplus x) = x$ nach, woraus mit Hilfe der Distributivität, die sich unmittelbar aus der Definition ergibt (die Fallunterscheidung richtet sich nur nach dem Wert von $t^{-1}x$), die Kürzungsregel folgt. In der Figur bedeutet die getroffene Festsetzung, daß die geknickte „Gerade" die Gleichung $y = x \oplus 1$ erhält. Alle anderen Geraden außer den



Achsenparallelen erhält man daraus durch Streckung in der x- und y-Richtung.

Daß man so tatsächlich einen Neokörper erhält, erfordert den Nachweis (PAIGE [1950]), daß für $s \neq s'$ die Gleichung $sx \oplus t = s'x \oplus t'$ eindeutig nach x auflösbar ist. Hierzu betrachtet man die stetige reelle Funktion f mit $f(x) = (sx \oplus t) - (s'x \oplus t')$. Ist $s = 0$ oder $s' = 0$ oder haben s und s' verschiedenes Vorzeichen, so ist f eine streng monotone Funktion, deren Ableitung, abgesehen von drei Stellen, überall erklärt ist und für die $|f'(x)| = |s - s'| > 0$ bei genügend großem Absolutwert von x gilt. Daher hat f in diesen Fällen genau eine Nullstelle. In den anderen Fällen kann man durch Wahl der Bezeichnung erreichen, daß s' der absolut kleinere der beiden Werte s, s' ist. Da die Auflösung der betrachteten Gleichung gleichwertig ist mit der Auflösung der aus ihr durch Multiplikation mit s'^{-1} hervorgehenden Gleichung, kann man sich auf $s' = 1 < s$ beschränken. Im Fall $t = t'$ ist nichts mehr zu beweisen; sonst kann man auch noch annehmen, daß $t < t'$ ist; der gegenteilige Fall läßt sich nämlich durch Wechsel des Vorzeichens von x und Multiplikation der Gleichung mit (-1) hierauf zurückführen. Für hinreichend großen Absolutwert von x gilt immer der erste Fall der Definition von $\oplus$ und es ist $f'(x) = s - 1 > 0$. Daher existiert mindestens eine Nullstelle von f. Mittels der Monotoniegesetze für die Verknüpfung $\oplus$ folgt wegen der vorausgesetzten Ungleichungen für s, t, t' aus $x \leqq 0$ stets $f(x) < 0$. Man kann sich also auf die Betrachtung der Funktion f im Intervall $x > 0$ beschränken. Für einen Wert x, bei dem nicht $f'(x) \geqq \frac{s-1}{2}$ gilt, bei dem also ein Knick vorliegt oder die Ableitung einen Wert $< \frac{s-1}{2}$ hat, liegt entweder für die Definition von $sx \oplus t$ der zweite Fall vor, aber für die Definition von $x \oplus t'$ der erste oder dritte Fall, oder $sx \oplus t$ ist nach dem ersten oder zweiten Fall definiert und $x \oplus t'$ nach dem dritten. Bei jeder dieser Möglichkeiten ergibt sich $f(x) \neq 0$, und zwar so: Sei

(1) $0 < t < t'$. Dann wäre $sx \leqq t$ und $x \geqq t'$. Dies führt aber wegen $x < sx$ auf einen Widerspruch.

(2) $t < 0 < t'$. Dann ist $sx \leqq -\frac{2}{3}t$ und $x \geqq t'$, also

$$sx \oplus t \leqq (-\tfrac{2}{3} \oplus 1)\, t < 0 < x \oplus t'.$$

(3) $t < t' < 0$. Dann ist entweder $sx \leqq -\frac{2}{3}t$ und $x \geqq -\frac{2}{3}t'$, also

$$sx \oplus t \leqq (-\tfrac{2}{3} \oplus 1)\, t < (-\tfrac{2}{3} \oplus 1)\, t' \leqq x \oplus t';$$

oder es ist $sx \geqq -\frac{3}{2}t$ und $x \leqq -\frac{3}{2}t'$, also

$$sx \oplus t \geqq (-\tfrac{3}{2} \oplus 1)\, t > (-\tfrac{3}{2} \oplus 1)\, t' \geqq x \oplus t'.$$

An jeder Nullstelle x der stetigen Funktion f ist also $f'(x)$ vorhanden und $\geqq \frac{s-1}{2} > 0$. Daher kann f höchstens eine Nullstelle haben. Damit ist gezeigt, daß die angegebene Konstruktion wirklich einen (planaren) Neokörper liefert.

Kann man also im allgemeinen bei einem zur Menge der reellen Zahlen homöomorphen Neokörper nichts über die Addition aussagen, so gilt doch wenigstens für die Multiplikation:

Die multiplikative Gruppe $T^\times$ eines zum Körper der reellen Zahlen homöomorphen Neokörpers T ist isomorph zur multiplikativen Gruppe $R^\times$ dieses Körpers.

Da es nichtkommutative zu $R^\times$ homöomorphe Gruppen gibt (etwa die Erweiterung der Gruppe der positiven reellen Zahlen durch den Automorphismus $x \to x^{-1}$), aber wie sich zeigen wird, alle kommutativen zu $R^\times$ homöomorphen Gruppen mit $R^\times$ isomorph sind, handelt es sich beim Beweis im wesentlichen um den Nachweis der Kommutativität von $T^\times$. Zunächst ergibt sich aus den bekannten Sätzen über topologische Gruppen (BOURBAKI [**1947**], Top. gén. V, § 2), daß die zusammenhängende Komponente H des Elementes 1 von T isomorph ist zur Gruppe der positiven reellen Zahlen. Nun betrachtet man die durch $x + x^\varepsilon = 0$ erklärte Abbildung ε. Wegen $0^\varepsilon = 0$ stellt ε einen Homöomorphismus von $T^\times$ dar, vertauscht also die beiden zusammenhängenden Komponenten von $T^\times$ oder läßt sie fest. Das letzte kann aber nicht der Fall sein; denn die additive Loop $(T, +)$ ist nach § 11 eine angeordnete Loop und H besteht bei der dort eingeführten Anordnung aus allen Elementen > 0, also ist $H + H \subsetneqq H$, während $H + H^\varepsilon$ das Element 0 enthält, so daß also H und H^ε verschieden sind und $T^\times = H \cup H^\varepsilon$ ist. Wegen $(a + a^\varepsilon) b = b(a + a^\varepsilon) = 0$ gilt $ab + a^\varepsilon b = ba + ba^\varepsilon$. Für a, b in H folgt also aus der Kommutativität von H auch $a^\varepsilon b = b a^\varepsilon$ und mit Hilfe dieser Beziehung ergibt sich auf dieselbe Weise $a^\varepsilon b^\varepsilon = b^\varepsilon a^\varepsilon$, so daß also $T^\times$ kommutativ ist.

Um jetzt den Isomorphismus zu den reellen Zahlen von der zusammenhängenden Komponente H von 1 auf die ganze Gruppe $T^\times$ auszudehnen, sucht man ein Element e im Komplement H' von H in $T^\times$ mit $e^2 = 1$. Die Abbildung $x \to ax$ mit einem festen Element a aus H' ist ein Homöomorphismus von $T^\times$ und führt H in eine zusammenhängende Menge über, die das Element a enthält, sie vertauscht also die beiden zusammenhängenden Komponenten H und H' von T. Daher ist $aH' = H$ und insbesondere a^2 ein Element h aus H. In H ist jedes Element ein Quadrat, also läßt sich h in der Form b^2 mit b in H schreiben. Wegen der Kommutativität von $T^\times$ ist jetzt $(ab^{-1})^2 = 1$ und $e = ab^{-1}$ liegt in H'. Bezeichnet ϱ die isomorphe Abbildung von H auf die Gruppe der positiven reellen Zahlen, so setzt die Abbildung $e\,x \to -x^\varrho$ für x in H den Isomorphismus auf die ganze Gruppe $T^\times$ fort.

§ 14. Topologische Alternativkörper

Es ist bekannt (s. z.B. PICKERT [**1955**], S. 265), daß jeder topologische Schiefkörper eine topologische (desarguessche) Ebene definiert. Dieses Ergebnis läßt sich auf Alternativkörper ausdehnen:

Zu einem topologischen Alternativkörper gibt es bis auf Isomorphie genau eine topologische projektive Ebene, die den Alternativkörper zum Ternärkörper hat und in ihm die gegebene Topologie induziert.

Beweis. Nach dem üblichen Verfahren wird zu dem Alternativkörper T eine projektive Ebene konstruiert, indem man alle Paare (x, y) mit $x, y \in T$ als eigentliche Punkte nimmt, die Mengen $[s, t]$ der Punkte (x, y) mit $sx + t = y$ und die Mengen $[r]$ der Punkte (r, y) mit $y \in T$ als affine Geraden. Dazu kommen die Punkte (z), die eingeführt werden als Schnittpunkte aller Geraden $[z, t]$ mit $t \in T$ und der Punkt (∞) als Schnittpunkt der Geraden $[r]$ mit $r \in T$ als uneigentliche Punkte, die alle zusammen die uneigentliche Gerade $[\infty]$ bilden.

Wenn es überhaupt eine Topologisierung der so gebildeten projektiven Ebene gibt, die auf T die gegebene Topologie hervorruft, so ist diese Topologie der Ebene eindeutig durch die von T bestimmt, und zwar so, daß die affine Ebene topologisches Produkt von T mit sich selbst wird. Das bedeutet, daß die Gesamtheit der Mengen $U \times V$, wo U Umgebung von x und V Umgebung von y ist, eine Basis für den Umgebungsfilter des Punktes (x, y) bilden muß. Weiter werden jetzt die Umgebungen für die uneigentlichen Punkte und die Geraden in geeigneter Weise definiert und dann wird nachgerechnet, daß bei diesen Umgebungsdefinitionen Verbinden und Schneiden wirklich stetige Operationen werden. Damit sind dann die Umgebungsdefinitionen auch gerechtfertigt. Für den Umgebungsfilter des Punktes (z) nimmt man als Basis die Gesamtheit der Mengen, die für eine Umgebung U von 0 und eine Umgebung V von z aus allen Punkten (x, y) mit $x^{-1} \in U$ und $yx^{-1} \in V$ und allen Punkten (w) mit $w \in V$ bestehen. Für den Umgebungsfilter des Punktes (∞) nimmt man als Basis die Gesamtheit der Mengen, die für eine Umgebung U von 0 aus allen Punkten (x, y) mit $y^{-1} \in U$ und $xy^{-1} \in U$ und allen Punkten (w) mit $w^{-1} \in U$ bestehen. Die Umgebungen für die Geraden gehen daraus durch Vertauschen von x mit s und y mit $-t$ bei Umkehrung der Multiplikationsreihenfolge und Ersetzen der runden Klammern durch eckige hervor, womit eine Dualität zwischen Punkt- und Geradentopologie gegeben ist. Wenn man die Stetigkeit des Verbindens nachgerechnet hat, ergibt sich mit Hilfe dieser Dualität auch die des Schneidens.

Der Nachweis der Stetigkeit muß für die verschiedenen Typen von Verbindungsgeraden getrennt geführt werden, verläuft jedoch immer nach dem gleichen Schema.

(1) Verbindung von (x_1, y_1) und (x_2, y_2) mit $x_1 \neq x_2$.

Die Verbindungsgerade ist vom Typ $[s, t]$ und bestimmt sich durch $y_i = sx_i + t$ $(i = 1, 2)$. Es ist $s = (y_1 - y_2)(x_1 - x_2)^{-1}$, $t = y_1 - sx_1$. Also hängen s, t wegen $x_1 - x_2 \neq 0$ stetig von x_1, y_1, x_2, y_2 ab.

(2) Verbindung von (p, q_1) und (p, q_2).

Die Verbindungsgerade ist $[p]$. Eine Umgebung von $[p]$ ist bestimmt durch Angabe einer Umgebung U von 0 und einer Umgebung V von p und besteht aus allen Geraden $[s, t]$ mit $s^{-1} \in U$, $-s^{-1}t \in V$ und allen Geraden $[r]$ mit $r \in V$. Man muß Umgebungen W_i von (p, q_i) finden, so daß alle Verbindungsgeraden eines Punktes (x_1, y_1) von W_1 mit einem Punkt (x_2, y_2) von W_2 in

einer solchen vorgegebenen Umgebung von $[p]$ liegen. Ist $x_1 \neq x_2$ und hat man W_1, W_2 so klein gewählt, daß stets $y_1 \neq y_2$ ist, so gilt $s^{-1} = (x_1 - x_2)(y_1 - y_2)^{-1}$, $-s^{-1}t = x_1 - s^{-1}y_1$. Daher kann man durch geeignete Wahl von W_1 und W_2 erreichen, daß $s^{-1} \in U$ und $-s^{-1}t \in V$. Ist $x_1 = x_2 = r$, so ist $[r]$ die Verbindungsgerade der beiden Punkte, und indem man die W_i gegebenenfalls noch verkleinert, erreicht man auch noch $r \in V$.

(3) Verbindung von (p, q) und (z).

Die Verbindungsgerade ist $[z, t]$ mit $q = zp + t$. Zu einer Umgebung U von z und einer Umgebung V von $-zp + q$ muß man also eine Umgebung W von (p, q) und eine Umgebung Z von (z) angeben, so daß die Verbindungsgerade eines Punktes (x, y) aus W mit einem Punkt (u, v) aus Z oder einem Punkt (w) aus Z von der Form $[s, t]$ mit $s \in U$, $t \in V$ ist. Daß die Verbindungsgerade vom Typ $[s, t]$ ist, bedeutet $x \neq u$. Man kann sich W und Z von vornherein so klein gewählt denken, daß das stets der Fall ist. Aus $y = sx + t$ und $v = su + t$ folgt dann, wenn man t eliminiert, die Gleichung $s - (sx)u^{-1} = vu^{-1} - yu^{-1}$. Ihre rechte Seite soll mit a abgekürzt werden. Weiter erhält man hieraus

$$s = (au)(u - x)^{-1} = a + (ax)(u - x)^{-1} = a + (ax)\left(u^{-1}(1 - xu^{-1})^{-1}\right)$$

und, wenn man für a seinen Wert einsetzt,

$$s = vu^{-1} - yu^{-1} + \left((vu^{-1} - yu^{-1})x\right)\left(u^{-1}(1 - xu^{-1})^{-1}\right).$$

Die Umgebung Z von (z) ist dadurch gegeben, daß u^{-1} in einer Umgebung von 0 und vu^{-1} in einer Umgebung von z liegen, und Z wird dadurch beliebig klein, daß man diese Umgebungen beliebig klein wählt. Nun hängt s stetig von x, y, u^{-1}, vu^{-1} ab, und wenn nur W und Z genügend klein sind, so ist $s \in U$, und man kann auch noch erreichen, daß $t = -sx + y$ in V liegt.

Die Verbindungsgerade von (x, y) mit (w) hat die Form $[w, t]$, wo w in einer durch Z bestimmten Umgebung von z liegt und $y = wx + t$ ist. Für hinreichend kleines W und Z gilt also $w \in U$ und $t \in V$. Daher kann man W und Z so klein wählen, daß gleichzeitig diese und die vorher gestellten Forderungen erfüllt werden.

(4) Verbindung von (p, q) und (∞).

Die Verbindungsgerade ist $[p]$. Eine Umgebung von $[p]$ ist wie in (2) bestimmt. Man muß eine Umgebung W von (p, q) und eine Umgebung Z von (∞) finden, so daß die Verbindungsgeraden vom Typ $[s, t]$ eines Punktes (x, y) aus W mit einem Punkt (u, v) aus Z oder einem Punkt (w) aus Z die Bedingungen $s^{-1} \in U$, $-s^{-1}t \in V$ erfüllen und die Geraden vom Typ $[r]$ die Bedingung $r \in V$.

Ist $x \neq u$, so ist die zugehörige Verbindungsgerade vom Typ $[s, t]$. Aus $s = 0$ folgt $y = v$. Da aber die Umgebungen von (∞) dadurch gekennzeichnet sind, daß v^{-1} und uv^{-1} in einer Umgebung von 0 liegen, kann man W und Z von vornherein so klein gewählt denken, daß $y \neq v$, also $s \neq 0$ ist. Die Gleichungen $y = sx + t$ und $v = su + t$ kann man dann umformen zu $s^{-1}y = x + s^{-1}t$

und $s^{-1}=uv^{-1}+(s^{-1}t)v^{-1}$. Elimination von $s^{-1}t$ ergibt $s^{-1}-(s^{-1}y)v^{-1}=uv^{-1}-xv^{-1}$. Eine entsprechende Umformung wie bei (3) führt auf die Gleichung

$$s^{-1}=uv^{-1}-xv^{-1}+\left((uv^{-1}-xv^{-1})y\right)\left(v^{-1}(1-yv^{-1})^{-1}\right).$$

Wegen $y\neq v$ ist hier $1-yv^{-1}\neq 0$ und daher dieser Ausdruck erklärt. s^{-1} hängt also stetig von x, y, v^{-1}, uv^{-1} ab und für hinreichend kleines W und Z ist $s^{-1}\in U$ und $-s^{-1}t=-s^{-1}y+x\in V$.

Ist $x=u=r$, so ist $[r]$ die zugehörige Verbindungsgerade und für eine hinreichend kleine Umgebung W ist $r\in V$.

Die Verbindungsgerade von (x, y) mit (w) ist von der Form $[w, t]$ mit $y=wx+t$. Für eine hinreichend kleine Umgebung Z von (∞) liegt w^{-1} in der betrachteten Umgebung U von 0 und bei passender Wahl von W kann man auch noch $-w^{-1}t=-w^{-1}y+x\in V$ erreichen.

(5) Verbindung von (z_1) und (z_2).

Die Verbindungsgerade ist $[\infty]$. Eine Umgebung von $[\infty]$ besteht aus allen Geraden $[s, t]$ mit $t^{-1}\in U$, $t^{-1}s\in U$ und allen Geraden $[r]$ mit $r^{-1}\in U$, wo U eine Umgebung von 0 ist. Man muß Umgebungen Z_i von (z_i) finden, so daß die Verbindungsgeraden eines Punktes aus Z_1 mit einem Punkt aus Z_2 stets in der gegebenen Umgebung von $[\infty]$ liegen. Z_i besteht aus den Punkten (u_i, v_i), wo u_i^{-1} in einer Umgebung von 0 und $v_iu_i^{-1}$ in einer Umgebung von z_i liegt, und aus den Punkten (w_i) mit w_i aus einer Umgebung von z_i. Die Verbindungsgerade von (u_1, v_1) mit (u_2, v_2) ist im Fall $u_1=u_2=r$ von der Form $[r]$ und für hinreichend kleine Umgebungen Z_i liegt r^{-1} in U. Im Fall $u_1\neq u_2$ erhält man aus $v_i=su_i+t$ $(i=1, 2)$ durch Elimination von s die Gleichung $t^{-1}=(u_1^{-1}-u_2^{-1})(v_1u_1^{-1}-v_2u_2^{-1})^{-1}$ und weiter $t^{-1}s=t^{-1}(v_1u_1^{-1})-u_1^{-1}$. Für hinreichend kleine Umgebungen Z_i liegen t^{-1} und $t^{-1}s$ in U. Die Verbindungsgerade von (u, v) aus Z_1 mit (w) aus Z_2 ist $[w, t]$ mit $v=wu+t$. Hieraus berechnet sich $t^{-1}=u^{-1}(vu^{-1}-w)^{-1}$ und $t^{-1}w=t^{-1}(vu^{-1})-u^{-1}$. Für hinreichend kleine Z_i liegt also wieder die Verbindungsgerade in der gegebenen Umgebung von $[\infty]$.

Die Verbindungsgerade von $(w_1)\in Z_1$ mit $(w_2)\in Z_2$ ist $[\infty]$ selbst.

(6) Verbindung von (z) und (∞).

Die Verbindungsgerade ist $[\infty]$ und eine Umgebung von ihr sei wie in (5) gegeben. Man muß eine Umgebung Z von (z) und eine Umgebung W von (∞) finden, so daß die Verbindungsgerade eines Punktes (x, y) aus Z oder eines Punktes (s) aus Z mit einem Punkt (u, v) aus W oder (w) aus W stets in der betrachteten Umgebung von $[\infty]$ liegt. Ist $x=u$, so ist $[u]$ die Verbindungsgerade von (x, y) und (u, v), und es ist $u^{-1}\in U$, wenn man nur Z genügend klein gewählt hat. Für $x\neq u$ bestimmt sich die Verbindungsgerade $[s, t]$ aus $y=sx+t$ und $v=su+t$. Ist $u=0$ und sind Z sowie W hinreichend klein, so ist $t^{-1}\in U$ und $t^{-1}s=t^{-1}(yx^{-1})-x^{-1}\in U$. Ist $y=v$, so ist $s=0$ und für hinreichend kleines Z und W ist wieder $t^{-1}\in U$, $t^{-1}s=0\in U$. Ist $y\neq v$, so ist

$s \neq 0$. Wäre $t = 0$, so wäre $(y x^{-1})(u v^{-1}) = 1$. Man kann Z und W von vornherein so klein gewählt denken, daß dies nicht der Fall sein kann. Dann muß also auch $t \neq 0$ sein. Jetzt kann man $y = s x + t$ und $v = s u + t$ umformen zu $t^{-1}(y x^{-1}) = t^{-1} s + x^{-1}$ und $t^{-1} = (t^{-1} s)(u v^{-1}) + v^{-1}$. Daraus ergibt sich durch Elimination von $t^{-1} s$ die Gleichung

$$t^{-1} - \left(t^{-1}(y x^{-1})\right)(u v^{-1}) = v^{-1} - x^{-1}(u v^{-1}).$$

Mit den Abkürzungen $a = y x^{-1}$, $b = u v^{-1}$, $c = v^{-1} - x^{-1}(u v^{-1})$ liegen für hinreichend kleine Umgebungen Z und W die Elemente b, c in einer beliebig kleinen Umgebung von 0. Da der Fall $u = 0$ schon behandelt ist, kann man sich auf $u \neq 0$ beschränken, also $b \neq 0$ annehmen. Z und W waren darüber hinaus so gewählt, daß $b^{-1} \neq a$ ist. Nun ergibt sich

$$t^{-1} = (c b^{-1})(b^{-1} - a)^{-1} = c + (c a)(b^{-1} - a)^{-1} = c + (c a)\left(b(1 - a b)^{-1}\right).$$

Man kann also durch Wahl von Z und W erreichen, daß $t^{-1} \in U$, und ebenso, daß $t^{-1} s = t^{-1}(y x^{-1}) - x^{-1} \in U$.

Für (x, y) aus Z und (w) aus W bestimmt sich die Verbindungsgerade $[w, t]$ aus $y = w x + t$. Dabei kann man $t \neq 0$ annehmen; denn $t = 0$ hat $w^{-1}(y x^{-1}) = 1$ zur Folge und man kann sich W und Z von vornherein so klein gewählt denken, daß dies nicht der Fall ist. Dann ist $t^{-1} = -x^{-1}\left(w^{-1}(1 - (y x^{-1}) w^{-1})^{-1}\right)$ und liegt für genügend kleine Umgebungen W und Z in U. Dasselbe gilt auch für $t^{-1} w = t^{-1}(y x^{-1}) - x^{-1}$.

Für (s) aus Z und (u, v) aus W erhält man die Verbindungsgerade $[s, t]$ aus $v = s u + t$. Für hinreichend kleine Umgebungen W und Z ist $t \neq 0$. Im Fall $u \neq 0$ ist $(t^{-1} s)(u v^{-1}) + v^{-1} = t^{-1}$ und $t^{-1} = v^{-1} + (v^{-1} s)(v u^{-1} - s)^{-1} = v^{-1} + (v^{-1} s)\left((u v^{-1})(1 - s(u v^{-1}))^{-1}\right)$. Im Fall $u = 0$ ist $t^{-1} = v^{-1}$. Wählt man W und Z hinreichend klein, so ist also $t^{-1} \in U$ und $t^{-1} s \in U$.

Damit ist in jedem der möglichen Fälle gezeigt, daß die Verbindungsgerade zweier Punkte stetig von den beiden Punkten abhängt. Nach der vorausgeschickten Bemerkung gilt auch die duale Aussage. Die angegebene Konstruktion liefert also wirklich eine topologische projektive Ebene.

Literatur

Alexandroff-Hopf:

[1935] Topologie. Berlin.

N. Bourbaki:

[1947] Topologie générale V. Paris.

[1951] Topologie générale I, 2. Aufl. Paris.

P. Erdös:

[1940] The dimension of the rational points in Hilbert space. Ann. of Math. **41**, 734—736; MRev. **2**, 178; Zbl. **25**, 187.

H. Freudenthal:

[1957] Kompakte projektive Ebenen. Illinois J. of Math. **1**, 9—13.

Hurewicz-Wallmann:

[1948] Dimension theory. Princeton.

C. KURATOWSKI:
[**1952**] Topologie II, 2. Aufl. Warschau.
F. R. MOULTON:
[**1902**] A simple non-desargian plane geometry. Trans. Amer. Math. Soc. **3**, 192—195; FdM **33**, 497.
L. J. PAIGE:
[**1950**] Neo fields. Duke Math. J. **16**, 39—60; Zbl. **40**, 305.
G. PICKERT:
[**1955**] Projektive Ebenen. Berlin-Göttingen-Heidelberg.
[**1956**] Projektive Ebenen über Neokörpern. Wiss. Z. Univ. Jena **1955/56**, 131—135.
L. PONTRJAGIN:
[**1946**] Topological groups. Princeton.
H. SALZMANN:
[**1955**] Über den Zusammenhang in topologischen projektiven Ebenen. Math. Z. **61**, 489—494; Zbl. **64**, 178.
L. A. SKORNJAKOV:
[**1954**] Topologische projektive Ebenen. [Russ.] Trudy Moskov. Mat. Obšč. **3**, 347—373; MRev. **16**, 60.

Mathematisches Seminar der Universität Frankfurt a.M.

(Eingegangen am 24. Dezember 1956)

Weston, J. D.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 467—473 (1957)

On integration with respect to a measure

By

J. D. Weston

1. There are various methods of constructing a Lebesgue integral with respect to an abstract measure (see, for example, [1], Ch. I, [2], Ch. XI, [3], Ch. V; also, as regards the extension of integrals, [4], Ch. IV, [5], Ch. III, [6], Ch. 9). This variety suggests that there is a need for a simple axiomatic definition of an integral with respect to a given measure, and for a proof of uniqueness. We shall exhibit a set of axioms, representing some very elementary properties of an integral, and we shall show that there is a largest class of measurable functions for which an integral having these properties exists; we shall also show that such an integral is uniquely determined by the given measure, and we shall establish the usual convergence properties. From these results it follows immediately that all the definitions of an abstract Lebesgue integral that have been given, or that could be given, are equivalent.

Our method is based on the idea of a continuous measure ("absolutely continuous additive function of a set"). This, with our particular choice of axioms, enables us to define dominated sequences at an early stage, and the main results are then obtained very rapidly by means of Egoroff's theorem. For convenience, we restrict the discussion to the case of measures which are totally σ-finite ([3], p. 31); this does not involve a serious loss of generality (see, for example, [5], pp. 36—37).

In the next section we state our assumptions (the usual elementary facts) concerning measure and measurable functions. After that, our account of the integration process is given in full detail.

2. We consider an abstract space X and an additive class $\mathscr{A}$ of subsets of X. All "sets" that occur will be members of $\mathscr{A}$. ($\mathscr{A}$ is characterized by the fact that it contains X itself, the complement $X \setminus E$ of any member E, and the union $\bigcup_k E_k$ of any sequence of members $\{E_k\}$; hence $\mathscr{A}$ also contains the intersection $\bigcap_k E_k$ of any sequence of members.)

By a *measurable function* we mean a real-valued function f on X such that $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ for every Borel set B of real numbers. For example, the characteristic function χ_E of any set $E \in \mathscr{A}$ is measurable; more generally, a function is measurable if it is *simple* in the sense that its value is constant on each of a finite number of sets which belong to $\mathscr{A}$ and compose X. The limit of a convergent sequence of measurable functions is measurable, and every measurable function is the limit of a sequence of simple functions

(whence it follows that sums and products of measurable functions are measurable); in fact if f is measurable there is a sequence of simple functions $\{g_n\}$ such that, for each $x \in X$, $|g_n(x)| \leq |f(x)|$ for all n and $g_n(x) \to f(x)$ as $n \to \infty$. If f is measurable then $|f|$ is measurable.

By a *measure* we mean a function μ on $\mathscr{A}$ with $0 \leq \mu(E) \leq \infty$ for every $E \in \mathscr{A}$ and $\mu(\bigcup_k E_k) = \sum_k \mu(E_k)$ for every sequence $\{E_k\}$ in $\mathscr{A}$ such that $E_i \cap E_j = 0$ when $i \neq j$. If $\{E_k\}$ is a sequence in $\mathscr{A}$ such that $E_k \subseteq E_{k+1}$ for every k, then $\mu(\bigcup_k E_k) = \lim_{k \to \infty} \mu(E_k)$; and if $E_{k+1} \subseteq E_k$ then $\mu(\bigcap_k E_k) = \lim_{k \to \infty} \mu(E_k)$ provided that $\mu(E_k) < \infty$ for some k. The abbreviation "*p.p.*(μ)" means "except in a set H for which $\mu(H) = 0$".

We shall use the following version of EGOROFF's theorem: *Let μ be a measure on $\mathscr{A}$, and let $\{f_n\}$ be a sequence, or a multiple sequence, of measurable functions converging p.p.(μ) in a set E for which $\mu(E) < \infty$. Then if $\varepsilon > 0$ there is a subset H of E such that $\mu(H) < \varepsilon$ and $\{f_n\}$ converges uniformly in $E \setminus H$.*

3. We suppose that μ is a measure such that X can be expressed as $\bigcup_k X_k$, where, for each k, $X_k \subseteq X_{k+1}$ and $\mu(X_k) < \infty$; and we consider a class $\mathscr{L}$ of measurable functions such that

(a) $\chi_E \in \mathscr{L}$ if $\mu(E) < \infty$,

(b) $\alpha f + \beta g \in \mathscr{L}$ if $f, g \in \mathscr{L}$ and α, β are constants,

(c) $|f| \in \mathscr{L}$ if $f \in \mathscr{L}$.

There is a smallest class, $\mathscr{L}_0$, having the properties (a), (b), (c); this consists of all functions of the type $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$, where $\mu(E_i) < \infty$ for each i and $E_i \cap E_j = 0$ when $i \neq j$. Every measurable function f is the limit of a sequence $\{h_n\}$ in $\mathscr{L}_0$; for if $\{g_n\}$ is a sequence of simple functions converging to f, and $h_n = g_n \chi_{X_n}$, then $h_n \in \mathscr{L}_0$ for each n, and $\{h_n\}$ converges to f. Moreover, we may suppose that $|h_n(x)| \leq |f(x)|$ for all x and all n (since $|h_n(x)| \leq |g_n(x)|$).

By an *integral* (with respect to μ) we mean a real-valued function $\int$ on $\mathscr{A} \times \mathscr{L}$, subject to the following conditions (we use an obvious notation):

(1) If $f \in \mathscr{L}$ and f has a constant value c on E, where $\mu(E) < \infty$, then

$$\int_E f = c\mu(E).$$

(2) For each $E \in \mathscr{A}$, $\int_E$ is a linear form on $\mathscr{L}$; that is,

$$\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g.$$

(3) For each $f \in \mathscr{L}$, $\int_E |f|$ is a measure on $\mathscr{A}$.

It follows from (2) and (3) that, for each $f \in \mathscr{L}$, $\int_E f$ is an additive function on $\mathscr{A}$. Indeed, if $g = \frac{1}{2}(|f| + f)$ and $h = \frac{1}{2}(|f| - f)$ then $g, h \in \mathscr{L}$ and $\int_E g$, $\int_E h$ are measures (with finite values); hence if $\{E_k\}$ is a sequence in $\mathscr{A}$ such that

$E_i \cap E_j = 0$ when $i \neq j$ then, since $f = g - h$,

$$\int_{\bigcup_k E_k} f = \int_{\bigcup_k E_k} g - \int_{\bigcup_k E_k} h = \sum_k \int_{E_k} g - \sum_k \int_{E_k} h = \sum_k \int_{E_k} f,$$

all the series being absolutely convergent.

An integral can be defined on $\mathscr{A} \times \mathscr{L}_0$ in the following way: if $E \in \mathscr{A}$ and $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$, where $\mu(E_i) < \infty$ for each i and $E_i \cap E_j = 0$ when $i \neq j$, let

$$\int_E f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E \cap E_i).$$

There is no ambiguity here, for the sum on the right is not altered if we take $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ to be the distinct values of f. It is easy to verify that the conditions (1), (2), (3) are satisfied.

In all that follows we assume $\int$ to be some fixed integral on $\mathscr{A} \times \mathscr{L}$. (We eventually obtain a necessary and sufficient condition on $\mathscr{L}$ in order that this integral may exist, and we prove that it is unique.)

THEOREM 1. *Suppose that $f(x) \leq g(x)$ for all $x \in E$, where $E \in \mathscr{A}$ and $f, g \in \mathscr{L}$. Then $\int_E f \leq \int_E g$.*

Proof. Let $h = |g - f| - (g - f)$. Then $h \in \mathscr{L}$ and $h = |h|$. Hence, since $\int |h|$ is a measure,

$$\int_E h = \lim_{k \to \infty} \int_{E \cap X_k} h.$$

But $h(x) = 0$ for all $x \in E$; so that, since $\mu(E \cap X_k) < \infty$, $\int_{E \cap X_k} h = 0$ for each k, by (1). Thus $\int_E h = 0$. By (2), therefore,

$$\int_E |g - f| - \int_E g + \int_E f = \int_E h = 0.$$

Since $\int_E |g - f| \geq 0$, it follows that $\int_E f \leq \int_E g$.

Theorem 1 has the following corollaries (for $E \in \mathscr{A}$ and $f, g \in \mathscr{L}$):

(i) When $\mu(E) < \infty$, $\int_E f \leq c\mu(E)$ if $f(x) \leq c$ for all $x \in E$ [since, by (1), $\int_E g = c\mu(E)$ if $g = c\chi_E$)]; and $\int_E f \geq c\mu(E)$ if $f(x) \geq c$ for all $x \in E$.

(ii) $\int_E f = \int_E g$ if $f(x) = g(x)$ for all $x \in E$; in particular, $\int_E f = 0$ if $f(x) = 0$ for all $x \in E$ [since, by (2), $\int_E g = 0$ if $g(x) = 0$ for all x].

(iii) $\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|$ [since $\pm f(x) \leq |f(x)|$ for all x].

THEOREM 2. *In order that $\int_E |f| = 0$, where $E \in \mathscr{A}$ and $f \in \mathscr{L}$, it is necessary and sufficient that $f(x) = 0$ p.p.(μ) in E.*

Proof. Suppose first that $\int_E |f| = 0$. For each k, let E_k be the set of all points $x \in E \cap X_k$ for which $|f(x)| \geqq 1/k$. Then $E_k \in \mathscr{A}$ and $\mu(E_k) < \infty$, so that

$$(1/k)\,\mu(E_k) \leqq \int_{E_k} |f| \leqq \int_E |f| = 0,$$

and therefore $\mu(E_k) = 0$, for each k. Hence $\mu(\bigcup_k E_k) = 0$. But $\bigcup_k E_k$ is the set of all points $x \in E$ for which $f(x) \neq 0$; thus $f(x) = 0$ *p.p.*(μ) in E.

On the other hand, suppose that $f(x) = 0$ *p.p.*(μ) in E. For each k, let H_k be the set of all points $x \in E$ for which $0 < |f(x)| < k$. Then $H_k \in \mathscr{A}$, $H_k \subseteqq H_{k+1}$, and $\mu(H_k) = 0$. Hence if $H = \bigcup_k H_k$ then

$$\int_H |f| = \lim_{k\to\infty} \int_{H_k} |f| \leqq \lim_{k\to\infty} k\,\mu(H_k) = 0.$$

But $f(x) = 0$ for all $x \in E \backslash H$, so that $\int_{E\backslash H} |f| = 0$. Since $E = (E\backslash H) \cup H$, it follows that $\int_E |f| = 0$.

Theorem 2 enables us to relax the hypothesis of Theorem 1: it is enough to have $f(x) \leqq g(x)$ *p.p.*(μ) in E.

4. A measure ν is *continuous*[1]) (with respect to μ) if $\nu(X) < \infty$ and $\nu(E) = 0$ when $\mu(E) = 0$. Theorem 2 shows that, for each $f \in \mathscr{L}$, the measure $\int |f|$ is continuous [for if $\mu(E) = 0$ then $f(x) = 0$ *p.p.*(μ) in E]. Henceforth we shall write "*p.p.*" to mean "*p.p.*(μ)", and hence also "*p.p.*(ν)" for any continuous measure ν.

We say that a sequence $\{f_n\}$ in $\mathscr{L}$ is *dominated* (with respect to $\int$) if there is a continuous measure ν such that $\int_E |f_n| \leqq \nu(E)$ for all $E \in \mathscr{A}$ and all n. For example, we might have $|f_n(x)| \leqq |f(x)|$ for all x and all n, where $f \in \mathscr{L}$: the measure $\int |f|$ then dominates $\{f_n\}$.

LEMMA. *Let $\{f_n\}$ and $\{g_n\}$ be dominated sequences in $\mathscr{L}$ such that $f_m(x) - g_n(x) \to 0$ p.p. in E as $m, n \to \infty$, where $E \in \mathscr{A}$. Then $\int_E f_m - \int_E g_n \to 0$ as $m, n \to \infty$.*

Proof. Suppose that ν' and ν'' dominate $\{f_n\}$ and $\{g_n\}$ respectively, and let $\nu = \nu' + \nu''$. Then ν is a continuous measure that dominates both sequences. If $\varepsilon > 0$, we can choose k so that $\nu(X\backslash X_k) < \varepsilon$ [since $\nu(X) = \lim_{k\to\infty} \nu(X_k)$ and $\nu(X) < \infty$]. Then, for all m and n,

$$\int_{E\backslash X_k} |f_m - g_n| \leqq \int_{E\backslash X_k} (|f_m| + |g_n|) \leqq 2\nu(E\backslash X_k) \leqq 2\nu(X\backslash X_k) < 2\varepsilon.$$

By EGOROFF's theorem (with ν in place of μ), $E \cap X_k$ has a subset H such that $\nu(H) < \varepsilon$ and the double sequence $\{f_m - g_n\}$ is uniformly convergent in $(E \cap X_k)\backslash H = E_k$, say. Thus

$$\int_H |f_m - g_n| \leqq 2\nu(H) \leqq 2\varepsilon$$

[1]) A discussion of continuous measures may be found in [1], pp. 30—36; here we require only the properties specified in the definition.

for all m and n, and if m and n are large enough then

$$|f_m(x) - g_n(x)| \leq \varepsilon/\mu(E_k), \qquad \text{all } x \in E_k,$$

so that $\int_{E_k} |f_m - g_n| \leq \varepsilon$. Since $E = E_k \cup H \cup (E \setminus X_k)$, it follows that

$$\int_E f_m - \int_E g_n \leq \int_E |f_m - g_n| < 5\varepsilon$$

when m and n are large enough; thus $\int_E f_m - \int_E g_n \to 0$ as $m, n \to \infty$.

THEOREM 3. *Let $\{f_n\}$ be a dominated sequence in $\mathscr{L}$ such that $f_n(x) \to f(x)$ p.p. in E as $n \to \infty$, where $f \in \mathscr{L}$ and $E \in \mathscr{A}$. Then $\int_E f_n \to \int_E f$ as $n \to \infty$.*

Proof. Let $g_n = f$ for every n. Then $\int |f|$ dominates $\{g_n\}$. Hence, by the lemma, $\int_E f_n - \int_E f \to 0$ as $n \to \infty$, so that $\int_E f_n \to \int_E f$.

5. Suppose that $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$, where $\mu(E_i) < \infty$ for each i (so that $f \in \mathscr{L}_0$). If $E \in \mathscr{A}$ then, for each i, $\int_{E \cap E_i} \chi_{E_i} = \mu(E \cap E_i)$ by (1), and $\int_{E \setminus E_i} \chi_{E_i} = 0$ since $\chi_{E_i}(x) = 0$ for all $x \in E \setminus E_i$; thus $\int_E \chi_{E_i} = \mu(E \cap E_i)$. Hence, by (2),

$$\int_E f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E \cap E_i).$$

This shows that there is only one integral on $\mathscr{A} \times \mathscr{L}_0$. As far as $\mathscr{L}_0$ is concerned, therefore, the notion of dominated sequence is uniquely defined.

We now define $\mathscr{L}_1$ to be the class of all measurable functions which are limits p.p. of dominated sequences in $\mathscr{L}_0$. It is easy to verify that $\mathscr{L}_1$ has the properties (a), (b), (c). [For (a), use the fact that a sequence in which every term is χ_E is dominated by $\int \chi_E$, and for (b) the fact that if ν' and ν'' dominate $\{g_n\}$ and $\{h_n\}$ respectively then $|\alpha|\nu' + |\beta|\nu''$ dominates $\{\alpha g_n + \beta h_n\}$; (c) is obvious.]

THEOREM 4. *There is an integral on $\mathscr{A} \times \mathscr{L}_1$.*

Proof. Let $f \in \mathscr{L}_1$, and let $\{h_n\}$ be a dominated sequence in $\mathscr{L}_0$ such that $h_n(x) \to f(x)$ p.p. as $n \to \infty$. Then $h_m(x) - h_n(x) \to 0$ p.p. as $m, n \to \infty$. Hence if $E \in \mathscr{A}$ then, by the lemma, $\int_E h_m - \int_E h_n \to 0$ as $m, n \to \infty$, so that $\left\{\int_E h_n\right\}$ is a convergent sequence. Let $\overline{\int}_E f = \lim_{n \to \infty} \int_E h_n$; this is independent of the choice of $\{h_n\}$, for if $\{h_n'\}$ is an alternative choice then, by the lemma, $\int_E h_n - \int_E h_n' \to 0$ as $n \to \infty$.

With this definition of $\overline{\int}$, (2) is obviously satisfied and, since we may suppose that $|h_n(x)| \leq |f(x)|$ for all x and all n, (1) is satisfied when $c = 0$; consideration of $f - c\chi_E$ then shows that (1) is satisfied for any value of c. As to (3), let $\{E_k\}$ be a sequence in $\mathscr{A}$ such that $E_i \cap E_j = 0$ when $i \neq j$. The series $\sum_k \int_{E_k} |h_n|$

converges uniformly with respect to n, by comparison with $\sum_k \nu(E_k)$, where ν dominates $\{h_n\}$. Hence

$$\overline{\int}_{\bigcup_k E_k} |f| = \lim_{n\to\infty} \underline{\int}_{\bigcup_k E_k} |h_n| = \lim_{n\to\infty} \sum_k \underline{\int}_{E_k} |h_n| = \sum_k \overline{\int}_{E_k} |f|,$$

so that $\overline{\int}|f|$ is a measure (being obviously non-negative). Thus we have defined an integral $\overline{\int}$ on $\mathscr{A}\times\mathscr{L}_1$.

If $\{f_n\}$ is a sequence of measurable functions such that $\{f_n(x)\}$ converges *p.p.*, let f be defined as follows: $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ if $\{f_n(x)\}$ converges, and $f(x) = 0$ otherwise. Then f is a measurable function, which we denote by "$\lim_{n\to\infty} f_n$".

THEOREM 5. *Let $\{f_n\}$ be a dominated sequence in $\mathscr{L}$ such that $\{f_n(x)\}$ converges p.p. Then $\lim_{n\to\infty} f_n \in \mathscr{L}_1$.*

Proof. For each n, there is a sequence $\{h_m^{(n)}\}$ in $\mathscr{L}_0$ such that, for each x, $|h_m^{(n)}(x)| \leqq |f_n(x)|$ for all m and $h_m^{(n)}(x) \to f_n(x)$ as $m\to\infty$. Suppose that ν dominates $\{f_n\}$. Since $\nu(X) < \infty$, EGOROFF's theorem shows that, for each n, there is a set $H_n \in \mathscr{A}$ such that $\nu(H_n) < 1/2^n$ and $h_m^{(n)}(x) \to f_n(x)$ uniformly in $X\backslash H_n$, as $m\to\infty$; thus we can choose m_n so that, for all $x \in X\backslash H_n$,

$$|h_{m_n}^{(n)}(x) - f_n(x)| < 1/n.$$

Let $K_n = \bigcup_{n>p} H_p$, and let $K = \bigcap_n K_n$. Then $K \in \mathscr{A}$ and, since $\nu(K_n) < 1/2^n$, $\nu(K) = 0$. Let $h_n = h_{m_n}^{(n)}$, for each n. If $x \in X\backslash K$ then $x \in X\backslash K_n$ for some n, so that $x \in X\backslash H_n$ when n is large enough. Thus $h_n(x) - f_n(x) \to 0$ as $n\to\infty$, for each $x \in X\backslash K$. But if $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ then $f_n(x) \to f(x)$ *p.p.*; hence $h_n(x) \to f(x)$ *p.p.* in $X\backslash K$, as $n\to\infty$.

Now for each n, $\int_K |f_n| = 0$ [since $\nu(K) = 0$] and therefore, by Theorem 2, $f_n(x) = 0$ for all $x \in K\backslash L_n$, where L_n is a subset of K for which $\mu(L_n) = 0$. Let $L = \bigcup_n L_n$. Then $\mu(L) = 0$, and if $x \in K\backslash L$ then $f_n(x) = 0$, and therefore $h_n(x) = 0$, for all n. Thus $f(x) = 0$, and $h_n(x) \to 0$, *p.p.* in K. Hence $h_n(x) \to f(x)$ *p.p.* as $n\to\infty$. Since $\{h_n\}$ is dominated by ν, it follows that $f \in \mathscr{L}_1$.

THEOREM 6. *The integral $\int$ on $\mathscr{A}\times\mathscr{L}$ is unique, and $\mathscr{L} \subseteqq \mathscr{L}_1$.*

Proof. Let $f \in \mathscr{L}_1$, and let $f_n = f$ for every n. Then $\int |f|$ dominates $\{f_n\}$, so that, by Theorem 5, $f \in \mathscr{L}_1$; thus $\mathscr{L} \subseteqq \mathscr{L}_1$. By the definition of $\mathscr{L}_1$, there is a dominated sequence $\{h_n\}$ in $\mathscr{L}_0$ such that $h_n(x) \to f(x)$ *p.p.* as $n\to\infty$. By Theorem 3, $\int_E h_n \to \int_E f$ as $n\to\infty$, for any $E \in \mathscr{A}$. Since the integral on $\mathscr{A}\times\mathscr{L}_0$ is unique, it follows that $\int$ is unique on $\mathscr{A}\times\mathscr{L}$ (any integral on $\mathscr{A}\times\mathscr{L}$ coincides with $\int$ on $\mathscr{A}\times\mathscr{L}_0$ and hence also on $\mathscr{A}\times\mathscr{L}$).

We have now shown that for an integral to exist on $\mathscr{A}\times\mathscr{L}$ it is necessary and sufficient that $\mathscr{L} \subseteqq \mathscr{L}_1$. It is possible to have $\mathscr{L}_0 \subset \mathscr{L} \subset \mathscr{L}_1$: for example, if X is the interval $(0, 1)$ and μ is Lebesgue measure, $\mathscr{L}$ might consist of all bounded measurable functions.

6. To conclude, we take $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1$ and prove two theorems that help to elucidate the structure of this class.

THEOREM 7. *If f is a measurable function such that $|f(x)| \leqq g(x)$ p.p., where $g \in \mathscr{L}_1$, then $f \in \mathscr{L}_1$. In particular, $f \in \mathscr{L}_1$ if $|f| \in \mathscr{L}_1$ and f is measurable.*

Proof. Let $\{h_n\}$ be a sequence in $\mathscr{L}_0$ such that, for each x, $|h_n(x)| \leqq |f(x)|$ for all n and $h_n(x) \to f(x)$ as $n \to \infty$. If $|f(x)| \leqq g(x)$ p.p. and $g \in \mathscr{L}_1$ then $\int g$ dominates $\{h_n\}$; hence $f \in \mathscr{L}_1$.

The results we have obtained so far evidently include LEBESGUE's theorem of dominated convergence: *if $\{f_n\}$ is a sequence of measurable functions such that $\{f_n(x)\}$ converges p.p. and, for all n, $|f_n(x)| \leqq g(x)$ p.p., where $g \in \mathscr{L}_1$, then for each $E \in \mathscr{A}$,*

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n .$$

LEBESGUE's other convergence theorem may be deduced from the following result.

THEOREM 8. *Let $\{f_n\}$ be a non-decreasing sequence of non-negative functions in $\mathscr{L}_1$ such that the sequence $\left\{\int_X f_n\right\}$ is bounded. Then $\{f_n(x)\}$ converges p.p., and $\{f_n\}$ is dominated.*

Proof. Let $c = \sup_n \int_X f_n$. For each m and n, let $H_{m,n}$ be the set of all points x for which $f_n(x) > m$. Then $H_{m,n} \in \mathscr{A}$, $H_{m,n} \subseteqq H_{m,n+1}$, and $\mu(H_{m,n}) \leqq c/m$. Let $H_m = \bigcup_n H_{m,n}$. Then $\mu(H_m) = \lim_{n\to\infty} \mu(H_{m,n}) \leqq c/m$. But H_m is the set of all points x for which $\lim_{n\to\infty} f_n(x) > m$, so that $H_{m+1} \subseteqq H_m$ and $\bigcap_m H_m$ is the set in which $\{f_n(x)\}$ diverges. Hence $\mu\left(\bigcap_m H_m\right) = 0$, so that $\{f_n(x)\}$ converges p.p.

Let $\nu_n = \int |f_n|$ for each n. Then, for each $E \in \mathscr{A}$, $\{\nu_n(E)\}$ is a bounded non-decreasing sequence: let $\nu(E) = \lim_{n\to\infty} \nu_n(E)$. If $\{E_k\}$ is a sequence in $\mathscr{A}$ such that $E_i \cap E_j = 0$ when $i \neq j$ then, for each k,

$$\sum_{i=1}^{k} \nu(E_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \nu_n(E) \leqq \lim_{n\to\infty} \nu_n\Big(\bigcup_k E_k\Big) = \nu\Big(\bigcup_k E_k\Big).$$

Hence $\sum_k \nu(E_k) \leqq \nu\left(\bigcup_k E_k\right)$. But if $\varepsilon > 0$ we can choose n so that

$$\nu\Big(\bigcup_k E_k\Big) \leqq \nu_n\Big(\bigcup_k E_k\Big) + \varepsilon = \sum_k \nu_n(E_k) + \varepsilon \leqq \sum_k \nu(E_k) + \varepsilon .$$

Thus $\nu\left(\bigcup_k E_k\right) = \sum_k \nu(E_k)$, so that ν is a measure. Obviously, ν is continuous and dominates $\{f_n\}$.

References

[1] SAKS, S.: Theory of the integral. Warsaw 1937. — [2] NEUMANN, J. v.: Functional operators I. Princeton 1950. — [3] HALMOS, P. R.: Measure theory. New York 1950. — [4] BOURBAKI, N.: Éléments de mathématique XIII. Paris 1952. — [5] LOOMIS, L. H.: An introduction to abstract harmonic analysis. New York 1953. — [6] AUMANN, G.: Reelle Funktionen. Berlin 1954.

University of Durham, Newcastle upon Tyne

(Eingegangen am 7. Januar 1957)

Moppert, K.-F.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 474—478 (1957)

Funktionenscharen im L_2

Von

Karl-Felix Moppert *

Wir beschäftigen uns im folgenden mit reellen Funktionen $f(\nu, t)$ der reellen Variablen ν und t, die als Funktionen von t dem reellen Hilbertschen Raum L_2, bezogen auf das Intervall $0 \leqq t \leqq 1$ angehören. Norm bzw. Skalarprodukt in diesem Raum bezeichnen wir mit $\| \|$ bzw. $(,)$.

Definition 1. Ist $f(\nu, t) \in L_2$ für $N_1 < \nu < N_2$ und ist für $N_1 < \nu_\varkappa < N_2$, $\lim_{\varkappa \to \infty} \nu_\varkappa = N_1$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots)$ die Funktionenschar $f(\nu_\varkappa, t)$ abgeschlossen, so nennen wir $f(\nu, t)$ bei $\nu = N_1$ *rechtsseitig unbedingt abgeschlossen*. Analog definieren wir *„linksseitig unbedingt abgeschlossen"* bzw. *„unbedingt abgeschlossen"* schlechthin.

Bekanntlich gibt es analytische Funktionen $f(\nu, t)$, die bei einem $\nu = N_1$ nicht unbedingt abgeschlossen sind, während es doch gewisse gegen N_1 strebende Zahlenfolgen $\nu_\varkappa^*$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots)$ gibt, derart, daß die Funktionen $f(\nu_\varkappa^*, t)$ ein abgeschlossenes System bilden. So ist z.B. $f(\nu, t) = t^\nu$ bei jedem N_1, $-\frac{1}{2} < N_1 < \infty$ unbedingt abgeschlossen, bei $\nu = -\frac{1}{2}$ aber nicht rechtsseitig unbedingt abgeschlossen, während doch die Funktionenschar $f_\varkappa(t) = t^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{\varkappa}}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots)$ abgeschlossen ist [1]).

Wir geben in dieser Arbeit zunächst eine hinreichende Bedingung dafür, daß $f(\nu, t)$ bei $\nu = 0$ rechtsseitig unbedingt abgeschlossen ist und hierauf, unter etwas stärkeren Voraussetzungen, auch eine notwendige. Die Ergebnisse lassen sich natürlich ohne weiteres so formulieren, daß sie sich auf eine der beiden andern Formen der unbedingten Abgeschlossenheit bei einem beliebigen $\nu = N_1$ beziehen.

§ 1. Hinreichende Bedingung dafür, daß $f(\nu, t)$ bei $\nu = 0$ rechtsseitig unbedingt abgeschlossen ist

Wir bezeichnen mit $G(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ die Gramsche Determinante der Funktionen $f_\nu(t) \in L_2$; $\nu = 1, 2, \ldots, n$, bezogen auf das Intervall $(0, 1)$. Wir setzen weiter $Q(g; f_1, f_2, \ldots, f_n) = G(g, f_1, f_2, \ldots, f_n)/G(f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Abkürzend schreiben wir f_{ν_i} für $f(\nu_i, t)$ und $f^{(\varkappa)}$ für $\left[\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^\varkappa f(\nu, t)\right]_{\nu=0}$. Wir definieren das Symbol $[\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_k] f$ $(k = 1, 2, \ldots)$ durch $[\nu_1] f = f_{\nu_1}$ und $[\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_{k+1}] f = \left([\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_{k-1} \nu_{k+1}] f - [\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_{k-1} \nu_k] f\right) : (\nu_{k+1} - \nu_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ [2]).

*) Herrn Dr. H. F. J. Lowig bin ich für mehrere wertvolle Hinweise zu Dank verpflichtet.

[1]) Vgl. Kaczmarz, S., u. H. Steinhaus: Theorie der Orthogonalreihen. Monografje Matematyczne, 2. Aufl., Bd. VI, S. 90. New York: Chelsea 1951. Siehe auch die dortigen Literaturangaben.

[2]) Vgl. Nörlund: Differenzenrechnung, Grundlehren-Bd. XIII, S. 8. Berlin: Springer 1924.

Hilfssatz. Gilt $\|f_\nu(t)\| \leq M$ und $\|f_\nu(t)+h_\nu(t)\| \leq M$ für $\nu = 1, 2, \ldots, n$, so ist

$$|G(f_1+h_1, f_2+h_2, \ldots, f_n+h_n) - G(f_1, f_2, \ldots, f_n)| \leq 2M^{2n-1}(\|h_1\|+\|h_2\|+\cdots+\|h_n\|).$$

Beweis. Es kann für jedes $f \in L_2$ eindeutig $f = f^* + f^{**}$ gesetzt werden mit $(f^*, f^{**}) = 0$, f^{**} enthalten in der durch die Funktionen $f_2, f_3, \ldots, f_n$ aufgespannten linearen Mannigfaltigkeit. Dann ist $G(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \|f_1^*\|^2 G(f_2, \ldots, f_n)$ und $(f+g)^* = f^* + g^*$. Es folgt

$$\begin{aligned}|G(f_1+h_1, f_2, \ldots, f_n) - G(f_1, f_2, \ldots, f_n)| &= |\|f_1^*+h_1^*\|^2 - \|f_1^*\|^2|\, G(f_2, f_3, \ldots, f_n)\\ &= |\|f_1^*+h_1^*\| - \|f_1^*\||\,(\|f_1^*+h_1^*\| + \|f_1^*\|)\, G(f_2, f_3, \ldots, f_n)\\ &\leq \|h_1^*\|\,(\|f_1^*+h_1^*\| + \|f_1^*\|)\, G(f_2, f_3, \ldots, f_n)\\ &\leq \|h_1\| \cdot 2M^{2n-1}\end{aligned}$$

und hieraus unmittelbar die Behauptung.

Definition 2. Wir nennen $f(\nu, t)$ bei $\nu = \nu_0$ *rechtsseitig k-mal gleichmäßig L_2-differenzierbar*, wenn die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

a) Es gibt $\varepsilon > 0$ so, daß $\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^\varkappa f(h, t)$ existiert und $\in L_2$ ist für $\nu_0 \leq h \leq \nu_0 + \varepsilon$; $\varkappa = 0, 1, \ldots, k$ und für fast alle t in $(0, 1)$.

b) Ist $\nu_0 \leq h(t) \leq \nu_0 + \varepsilon$ und ist $\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^\varkappa f(h(t), t) \in L_2$, so ist

$$\left\|\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^\varkappa f(h(t), t) - \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^\varkappa f(\nu_0, t)\right\| = o(1)$$

für $\varepsilon \to 0$, $\varkappa = 0, 1, \ldots, k$.

Satz 1. Sei $f(\nu, t)$ bei $\nu = 0$ rechtsseitig k-mal gleichmäßig L_2-differenzierbar und sei $G(f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(k)}) \neq 0$. Dann ist für jedes $g(t) \in L_2$:

$$Q(g; f_{\nu_1}, f_{\nu_2}, \ldots, f_{\nu_{k+1}}) = Q(g; f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(k)}) + o(1)$$

für $\sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2 + \cdots + \nu_{k-1}^2} \to 0$, sofern bei diesem Grenzübergang die $\nu_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, k+1$) paarweise verschiedene positive Werte durchlaufen.

Beweis. Aus elementaren Determinantensätzen folgt (sofern die Werte $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{k+1}$ paarweise verschieden sind), daß wir $\nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_{k+1}$ voraussetzen können und

$$\begin{aligned}&G(g, f_{\nu_1}, f_{\nu_2}, \ldots, f_{\nu_{k+1}})\\ &= \prod_{\varkappa=2}^{k+1} (\nu_1 - \nu_\varkappa)^2\, G(g, [\nu_1]f, [\nu_1\nu_2]f, [\nu_1\nu_3]f, \ldots, [\nu_1\nu_{k+1}]f)\\ &= \prod_{\varkappa=2}^{k+1} (\nu_1 - \nu_\varkappa)^2 \prod_{\varkappa=3}^{k+1} (\nu_2 - \nu_\varkappa)^2\, G(g, [\nu_1]f, [\nu_1\nu_2]f, [\nu_1\nu_2\nu_3]f, [\nu_1\nu_2\nu_4]f, \ldots)\\ &= \cdots\\ &= \prod_{\varkappa>\lambda}^{k+1} (\nu_\lambda - \nu_\varkappa)^2\, G(g, [\nu_1]f, [\nu_1\nu_2]f, [\nu_1\nu_2\nu_3]f, \ldots, [\nu_1\nu_2\ldots\nu_{k+1}]f),\end{aligned}$$

wobei im letzten Produkt rechts alle Faktoren der Form $(\nu_\lambda - \nu_\varkappa)^2$ enthalten sind mit $\varkappa > \lambda$, $k+1 \geq \varkappa$, $\lambda \geq 1$.

Die entsprechende Umformung führen wir bei $G(f_{\nu_1}, f_{\nu_2}, \ldots, f_{\nu_{k+1}})$ durch. So folgt

$$Q(g; f_{\nu_1}, f_{\nu_2}, \ldots, f_{\nu_{k+1}}) = Q(g; [\nu_1]f, [\nu_1\nu_2]f, \ldots, [\nu_1\nu_2\ldots\nu_{k+1}]f).$$

Nun gibt es aber[3]) $\nu_\varkappa^*(t)$, $\nu_1 < \nu_\varkappa^*(t) < \nu_{\varkappa+1}$ derart, daß

$$[\nu_1\nu_2\ldots\nu_{\varkappa+1}]f = \frac{1}{\varkappa!}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^\varkappa f(\nu_\varkappa^*(t), t)$$

gilt für $\varkappa = 1, \ldots, k$ und fast alle t in $(0, 1)$. Hier ist der Ausdruck links $\in L_2$ und damit auch derjenige rechts. Somit ist

$$[\nu_1\nu_2\ldots\nu_{\varkappa+1}]f = \frac{1}{\varkappa!}\left(f^{(\varkappa)} + r_\varkappa(t)\right), \quad r_\varkappa(t) \in L_2, \quad \|r_\varkappa(t)\| = o(1)$$

für $\sqrt{\nu_1^2+\nu_2^2+\cdots+\nu_{\varkappa+1}^2} \to 0$ $(\varkappa = 0, 1, \ldots, k)$. Somit ist

$$Q(g; f_{\nu_1}, f_{\nu_2}, \ldots, f_{\nu_{k+1}}) = \frac{G(g, f^{(0)} + r_0(t), f^{(1)} + r_1(t), \ldots, f^{(k)} + r_k(t))}{G(f^{(0)} + r_0(t), f^{(1)} + r_1(t), \ldots, f^{(k)} - r_k(t))}$$

mit $\|r_\varkappa(t)\| = o(1)$ $(\varkappa = 0, 1, \ldots, k)$ für $\sqrt{\nu_1^2+\nu_2^2+\cdots+\nu_{k+1}^2} \to 0$. Anderseits folgt aus dem Hilfssatz:

$$G\left(g, f^{(0)} + r_0(t), \ldots, f^{(k)} + r_k(t)\right) = G(g, f^{(0)}, \ldots, f^{(k)}) + R$$

mit $R \to 0$ für $\sqrt{\nu_1^2+\nu_2^2+\cdots+\nu_{k+1}^2} \to 0$. Ebenso ist

$$G\left(f^{(0)} + r_0(t), \ldots, f^{(k)} + r_k(t)\right) = G(f^{(0)}, \ldots, f^{(k)}) + R^*$$

mit $R^* \to 0$ für $\sqrt{\nu_1^2+\nu_2^2+\cdots+\nu_{k+1}^2} \to 0$ und damit ist der Satz bewiesen.

Satz 2. Bilden die Funktionen $f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots$ ein abgeschlossenes System, ist $G(f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(\varkappa)}) \neq 0$ für $\varkappa = 1, 2, \ldots$ und ist die Funktion $f(\nu, t)$ bei $\nu = 0$ rechtsseitig beliebig oft gleichmäßig L_2-differenzierbar, so ist $f(\nu, t)$ bei $\nu = 0$ rechtsseitig unbedingt abgeschlossen.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es zu jedem $g(t) \in L_2$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $k_0 = k_0(g, \varepsilon)$ derart, daß $0 \leq Q(g; f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(k_0-1)}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Nach Satz 1 gibt es außerdem ein $\delta = \delta(k_0) > 0$ so, daß

$$|Q(g; f_{\nu_1^*}, f_{\nu_2^*}, \ldots, f_{\nu_{k_0}^*}) - Q(g; f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(k_0-1)})| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ist für $0 < \nu_\varkappa^* \leq \delta$ $(\varkappa = 1, \ldots, k_0)$, $\nu_\varkappa^* \neq \nu_\lambda^*$ für $\varkappa \neq \lambda$. Ist jetzt $\nu_\varkappa$ $(\varkappa = 0, 1, \ldots)$ eine über positive Werte nach 0 strebende Zahlenfolge, so gibt es $k_1 = k_1(\delta)$ so, daß $0 < \nu_\varkappa \leq \delta$ ist für $\varkappa > k_1$. Dann ist für jedes $k > k_1 + k_0 - 1$:

$$0 \leq Q(g; f_{\nu_1}, f_{\nu_2}, \ldots, f_{\nu_k}) \leq Q(g; f_{\nu_{k_1}}, f_{\nu_{k_1+1}}, \ldots, f_{\nu_{k_1+k_0-1}}) \leq \varepsilon$$

und damit ist der Satz bewiesen.

---

[3]) Vgl. a. a. O. [2]) S. 13.

§ 2. L_2-Potenzreihen

Einen Ausdruck der Form $\sum_0^\infty \nu^\lambda \varphi_\lambda(t)$; $\varphi_\lambda(t) \in L_2$ $(\lambda = 0, 1, \ldots)$ nennen wir eine *L_2-Potenzreihe um $\nu = 0$*. Eine solche hat offenbar ebenso wie eine reelle Potenzreihe einen wohldefinierten Konvergenzradius. Weiter ist eine L_2-Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$ für $|\nu| \leq \nu_1 < r$ gleichmäßig konvergent in dem Sinne, daß $\sum_{\lambda_1}^{\lambda_2} \nu^\lambda \varphi_\lambda(t) < \varepsilon$ ist für $\lambda_{1,2} \geq l(\varepsilon)$, unabhängig von ν. Somit ist dann auch $f(\nu, t) = \sum_0^\infty \nu^\lambda \varphi_\lambda(t)$ für $|\nu| \leq \nu_1 < r$ beliebig oft nach ν differenzierbar und es ist dort

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^\varkappa f(\nu, t) = \sum_\varkappa^\infty \lambda(\lambda - 1) \ldots (\lambda - \varkappa + 1)\, \nu^{\lambda - \varkappa} \varphi_\lambda(t),$$

wobei die rechts stehende Potenzreihe wieder den Konvergenzradius r hat[4]).

Satz 3. Konvergiert $\sum_0^\infty \nu^\lambda \varphi_\lambda(t) = f(\nu, t)$ für $|\nu| < r$, $r > 0$, so ist $f(\nu, t)$ bei $\nu = 0$ beliebig oft gleichmäßig L_2-differenzierbar.

Beweis. Es ist klar, daß Voraussetzung a) von Definition 2 erfüllt ist. Ist jetzt $0 \leq |h(t)| < \varepsilon < \nu_1 < r$, so ist

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^\varkappa f(h(t), t) \right\| &= \left\| \sum_\varkappa^\infty \lambda(\lambda - 1) \ldots (\lambda - \varkappa + 1)\, (h(t))^{\lambda - \varkappa} \varphi_\lambda(t) \right\| \\
&\leq \sum_\varkappa^\infty \| \lambda(\lambda - 1) \ldots (\lambda - \varkappa + 1)\, \varepsilon^{\lambda - \varkappa} \varphi_\lambda(t) \| \\
&= \sum_\varkappa^\infty \left(\frac{\varepsilon}{\nu_1}\right)^{\lambda - \varkappa} \| \lambda(\lambda - 1) \ldots (\lambda - \varkappa + 1)\, \nu_1^{\lambda - \varkappa} \varphi_\lambda(t) \| = o(1)
\end{aligned}$$

für $\varepsilon \to 0$.

Satz 4. Ist $f(\nu, t)$ für $|\nu| < r$ in eine konvergente L_2-Potenzreihe um $\nu = 0$ entwickelbar: $f(\nu, t) = \sum_0^\infty \nu^\lambda \varphi_\lambda(t)$, $\varphi_\lambda(t) \in L_2$, und ist $G(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\varkappa) \neq 0$ für $\varkappa = 1, 2, \ldots$, so sind nur die folgenden Fälle möglich:

a) $f(\nu, t)$ ist bei $\nu = 0$ unbedingt abgeschlossen;

b) es gibt einen echten Teilraum $M \subset L_2$ so, daß $f(\nu, t) \in M$ ist für $|\nu| < r$.

Beweis. Nach dem vorhergehenden Satz ist $f(\nu, t)$ bei $\nu = 0$ beliebig oft gleichmäßig L_2-differenzierbar. Dazu ist $f^{(\varkappa)} = \varkappa!\, \varphi_\varkappa(t)$. Bilden also die Funktionen $\varphi_\lambda(t)$ $(\lambda = 0, 1, \ldots)$ ein abgeschlossenes System, so sind die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt und $f(\nu, t)$ ist bei $\nu = 0$ unbedingt abgeschlossen.

---

[4]) Vgl. HILLE: Functional Analysis and Semi-Groups. American Mathematical Society Colloquium Publications, Bd. XXXI, S. 52. New York 1948.

Bilden anderseits die Funktionen $\varphi_\lambda(t)$ $(\lambda = 0, 1, \ldots)$ (bzw. die Funktionen $f^{(\varkappa)}$) kein abgeschlossenes System, so gibt es eine Funktion $e(t) \in L_2$ mit $\|e(t)\| = 1$, $(e, f^{(\varkappa)}) = 0$ $(\varkappa = 0, 1, \ldots)$. Sei nun M das orthogonale Komplement von e. Dann kann $f(\nu, t) = \alpha(\nu)\, e(t) + g(\nu, t)$; $g(\nu, t) \in M$ geschrieben werden mit $\alpha(\nu) = (e, f(\nu, t))$. Anderseits ist aber nach Voraussetzung $f(\nu, t) = \sum_0^\infty \nu^\lambda \varphi_\lambda(t)$. Dann ist für jedes ν mit $|\nu| \leq \nu_0 < r$ wegen der gleichmäßigen Konvergenz der rechtsstehenden Potenzreihe: $\alpha(\nu) = \sum_0^\infty \nu^\lambda (\varphi_\lambda, f(\nu, t))$. Also ist $\alpha(\nu)$ für $|\nu| < r$ in eine konvergente Potenzreihe entwickelbar. Aus $\alpha(\nu) = (e, f(\nu, t))$ folgt aber: $\alpha^{(\varkappa)}(0) = (e, f^{(\varkappa)})$ und dies verschwindet für jedes $\varkappa = 0, 1, \ldots$. Somit ist $f(\nu, t) = g(\nu, t) \in M \subset L_2$ für $|\nu| < r$, w. z. b. w.

University of Tasmania, Hobart (Australien)

(Eingegangen am 1. August 1956)

HUPPERT, B.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 479—518 (1957)

Lineare auflösbare Gruppen[1)]

Von

BERTRAM HUPPERT

Einleitung

Die Untersuchung von endlichen auflösbaren Gruppen von n-reihigen Matrizen (kurz: linearen auflösbaren Gruppen vom Grad n) ist für viele Fragen der abstrakten Gruppentheorie und der Theorie der Permutationsgruppen von Bedeutung.

Ist $\mathfrak{G}$ eine abstrakte auflösbare endliche Gruppe und $\mathfrak{E} = \mathfrak{N}_0 \lhd \mathfrak{N}_1 \ldots \lhd \mathfrak{N}_s = \mathfrak{G}$ eine Hauptreihe von $\mathfrak{G}$, so bewirkt jeder innere Automorphismus $X \to GXG^{-1}$ von $\mathfrak{G}$ einen Automorphismus auf den Hauptfaktoren $\mathfrak{N}_j/\mathfrak{N}_{j-1}$. Diese Hauptfaktoren sind bekanntlich elementar abelsche Gruppen. Legen wir für $\mathfrak{N}_j/\mathfrak{N}_{j-1}$ eine Basis $T_1, T_2, \ldots, T_{n_j}$ zugrunde, so wird ein Automorphismus in seiner Wirkung auf die Basiselemente T_i beschrieben durch

$$T_i \to T_1^{g_{i1}} T_2^{g_{i2}} \ldots T_{n_j}^{g_{in_j}}.$$

Gehen wir von der multiplikativen Schreibweise der abelschen Gruppe $\mathfrak{N}_j/\mathfrak{N}_{j-1}$ zur additiven Schreibweise über, so wird der Automorphismus zu einer linearen Abbildung eines Moduls. Hat $\mathfrak{N}_j/\mathfrak{N}_{j-1}$ die Ordnung $p_j^{n_j}$, so ist dieser Modul der n_j-dimensionale Vektorraum über dem Galois-Feld $GF(p_j)$. Damit haben wir eine Beschreibung der Wirkung der inneren Automorphismen von $\mathfrak{G}$ auf die Hauptfaktoren von $\mathfrak{G}$ durch lineare Gruppen erhalten. Zu beachten ist, daß es sich dabei um Gruppen über endlichen Körpern handelt.

Für eine genauere Kenntnis der Struktur abstrakter auflösbarer Gruppen ist also die Untersuchung der Eigenschaften von linearen auflösbaren Gruppen unerläßlich. Insbesondere ist es von Wichtigkeit, gewisse Strukturinvarianten einer linearen auflösbaren Gruppe durch den Grad n abzuschätzen. Die wichtigsten Invarianten sind folgende:

Die Stufe $k(\mathfrak{G})$; $k(\mathfrak{G})$ ist die kleinste ganze Zahl k mit $\mathfrak{G}^{(k)} = \mathfrak{E}$ ($\mathfrak{G}^{(k)} = k$-malige Bildung der Kommutatorgruppe).

Der Rang $r(\mathfrak{G})$; haben die Hauptfaktoren $\mathfrak{N}_j/\mathfrak{N}_{j-1}$ die Ordnungen $p_j^{n_j}$, so ist $r(\mathfrak{G}) = \max_j n_j$.

Die höchste Potenz p^g der Charakteristik p, welche in der Ordnung einer über $GF(p^f)$ vollständig reduziblen, auflösbaren Gruppe aufgeht.

[1)] Diese Arbeit ist der erste Teil meiner Habilitationsschrift (Universität Tübingen); der zweite Teil wird demnächst unter dem Titel „Zweifach transitive, auflösbare Permutationsgruppen" erscheinen.

Nach vorbereitenden Bemerkungen in § 1 über das Zerfallen von Normalteilern irreduzibler linearer Gruppen beschreiben wir in § 2 das in den meisten späteren Beweisen verwendete Induktionsprinzip, welches eine Induktion nach dem Grad n der Gruppe gestattet. Dieses Prinzip wurde teilweise bereits von C. JORDAN verwandt, um ein Konstruktionsverfahren für lineare auflösbare Gruppen anzugeben (C. JORDAN [12]). Wir benutzen es umgekehrt zur Strukturanalyse von linearen auflösbaren Gruppen. In § 3 folgen einfache Anwendungen auf die Darstellungen auflösbarer Gruppen (monomiale Darstellungen, Grade primitiver Darstellungen). In § 4 beginnt dann mit der Abschätzung der Stufe $k(\mathfrak{G})$ der Kern der Untersuchung. Es ergibt sich $k(\mathfrak{G}) \leqq \text{Min}\{2n, 7\,{}_2\log n + 1\}$. In § 5 folgt für vollständig reduzible Gruppen der Nachweis von $r(\mathfrak{G}) \leqq n$, darauf in § 6 für vollständig reduzible Gruppen über $GF(p^f)$ der Beweis von $g \leqq f(3n-p)/p$. Der letztere Beweis ist weit schwieriger als die vorhergehenden; denn nun hängt die Aussage wesentlich vom zugrunde liegenden Körper $GF(p^f)$ ab, was feinere Untersuchungen arithmetischer Natur erfordert.

In § 7 werden die erhaltenen Resultate auf abstrakte auflösbare Gruppen angewandt. Folgendes sind die Hauptergebnisse:

Ist $r(\mathfrak{G}) = r$, so ist $\mathfrak{G}^{(2r)}$ nilpotent. Dies ist ein Analogon zu dem bekannten Satz von E. WENDT [19], daß für überauflösbare Gruppen [d.h. für $r(\mathfrak{G}) = 1$] die Kommutatorgruppe $\mathfrak{G}'$ nilpotent ist. Ferner ergibt sich eine Beziehung zwischen den wichtigen Invarianten $r_p(\mathfrak{G})$ (p-Rang) und $l_p(\mathfrak{G})$ (p-Länge), welche in folgender Weise definiert sind:

$r_p(\mathfrak{G})$: Ist $\mathfrak{E} = \mathfrak{N}_0 \lhd \mathfrak{N}_1 \lhd \cdots \lhd \mathfrak{N}_s = \mathfrak{G}$ eine Hauptreihe von $\mathfrak{G}$ mit Hauptfaktoren $\mathfrak{N}_j/\mathfrak{N}_{j-1}$ der Ordnungen $p_j^{n_j}$, so sei $r_p(\mathfrak{G}) = \underset{p_j = p}{\text{Max}}\, n_j$. [Offenbar gilt $r(\mathfrak{G}) = \underset{p}{\text{Max}}\, r_p(\mathfrak{G})$.]

$l_p(\mathfrak{G})$: Sei p ein fester Primteiler der Ordnung von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{E} = \mathfrak{M}_0 \lhd \mathfrak{M}_1 \lhd \cdots \lhd \mathfrak{M}_t = \mathfrak{G}$ eine Normalteilerkette von $\mathfrak{G}$ mit der Eigenschaft, daß die Ordnungen der Faktorgruppen $\mathfrak{M}_j/\mathfrak{M}_{j-1}$ entweder zu p teilerfremd sind oder Potenzen von p sind. In dieser Kette mögen genau s Faktorgruppen von p-Potenzordnung auftreten. Dann bezeichnen wir das kleinste s, welches bei irgendeiner solchen Kette vorkommt, als p-Länge $l_p(\mathfrak{G})$.

Mit Hilfe der oben erwähnten Abschätzung von g ergibt sich eine Abschätzung von $l_p(\mathfrak{G})$ durch $r_p(\mathfrak{G})$, nämlich $l_p(\mathfrak{G}) \leqq r_p(\mathfrak{G})$ für alle p, für $p > 3$ sogar

$$l_p(\mathfrak{G}) \leqq \left\lfloor {}_{p/3}\log \frac{r_p(\mathfrak{G})}{p-1} \right\rfloor + 2.$$

Dieses Resultat ist besonders interessant, da P. HALL und G. HIGMAN in [8] kürzlich $l_p(\mathfrak{G})$ für p-auflösbare Gruppen durch gewisse Invarianten der p-Sylow-Gruppen (Klasse, Stufe, Exponent) abgeschätzt haben. Dabei trat die Bedeutung von $l_p(\mathfrak{G})$ zum ersten Male ans Licht.

Herrn H. WIELANDT danke ich herzlich für zahlreiche Ratschläge bei der Niederschrift dieser Arbeit.

Bezeichnungen

$|\mathfrak{G}|$ = Ordnung von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{G}$ bedeutet: $\mathfrak{U}$ ist Untergruppe von $\mathfrak{G}$, wobei auch $\mathfrak{U} = \mathfrak{G}$ zugelassen ist; $\mathfrak{U} < \mathfrak{G}$: $\mathfrak{U}$ ist Untergruppe von $\mathfrak{G}$, aber $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{G}$; $\mathfrak{U} \lhd \mathfrak{G}$: $\mathfrak{U}$ ist Normalteiler von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{U} \lhd \mathfrak{G}$: $\mathfrak{U}$ ist Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{G}$; $A(\mathfrak{G})$ = Automorphismengruppe von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{G}_p$ = p-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{G}$; ${}_p\mathfrak{G}$ = p-Sylow-Komplement von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ = Zentrum von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{G}'$ = Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{G}^{(n)}$ = n-te Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$; $(X, Y) = XYX^{-1}Y^{-1}$; $\Phi(\mathfrak{G})$ = Frattini-Gruppe von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{F}$ = maximaler nilpotenter Normalteiler von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{F}(p)$ = maximaler p-nilpotenter Normalteiler von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{N}(\mathfrak{U})$ = Normalisator der Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ = Zentralisator der Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$; $r(\mathfrak{G})$ = Rang von $\mathfrak{G}$ (s. Einleitung); $r_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{N})$ = Relativrang von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}$: Ist $\mathfrak{E} = \mathfrak{N}_0 \lhd \mathfrak{N}_1 \lhd \cdots \lhd \mathfrak{N}_s = \mathfrak{N}$ das Stück einer Hauptreihe von $\mathfrak{G}$ unterhalb von $\mathfrak{N}$ und ist $|\mathfrak{N}_j/\mathfrak{N}_{j-1}| = p_j^{a_j}$, so sei $r_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{N}) = \max_j a_j$; $r_p(\mathfrak{G})$ = p-Rang von $\mathfrak{G}$ (s. Einleitung); $l_p(\mathfrak{G})$ = p-Länge von $\mathfrak{G}$ (s. Einleitung); mit p und q bezeichnen wir stets Primzahlen; ist $p^a \mid m$, aber $p^{a+1} \nmid m$, so schreiben wir $p^a \top m$; $[x]$ sei die größte ganze Zahl k mit $k \leq x$.

§ 1. Reduzible Normalteiler irreduzibler Gruppen

Clifford hat in [3] allgemein untersucht, in welcher Weise ein Normalteiler $\mathfrak{N}$ einer irreduziblen Gruppe $\mathfrak{G}$ reduzibel sein kann. Wir stellen in diesem Paragraphen die wichtigsten Ergebnisse mit kurzen Beweisen zusammen und ziehen einige Folgerungen daraus. Dabei werden wir die Endlichkeit von $|\mathfrak{G}|$ nicht verwenden, nur an einigen Stellen die Endlichkeit von $|\mathfrak{G}/\mathfrak{N}|$. Der Körper K ist beliebig, sofern nicht ausdrücklich eine Voraussetzung über K angegeben wird.

Satz 1. Ist $\mathfrak{G}$ irreduzibel über K, so zerfällt jeder reduzible Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ über K vollständig in irreduzible Bestandteile des gleichen Grades.

Beweis. Sei $\mathfrak{m}$ der Darstellungsmodul von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{n}$ ein bezüglich $\mathfrak{N}$ invarianter und irreduzibler Teilmodul. Ist G ein beliebiges Element von $\mathfrak{G}$, so ist auch $G\mathfrak{n}$ unter $\mathfrak{N}$ invariant; denn wegen $G^{-1}NG \in \mathfrak{N}$ haben wir $NG\mathfrak{n} = GG^{-1}NG\mathfrak{n} = G\mathfrak{n}$. Aus der Irreduzibilität von $\mathfrak{N}$ auf $\mathfrak{n}$ folgt die Irreduzibilität von $G\mathfrak{n}$ bezüglich $\mathfrak{N}$; denn ein unter $\mathfrak{N}$ invarianter Teilmodul von $G\mathfrak{n}$ ginge bei Anwendung von G^{-1} in einen solchen von $\mathfrak{n}$ über. Da $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{m}$ irreduzibel ist, spannen die $G\mathfrak{n}$ ganz $\mathfrak{m}$ auf. Berücksichtigen wir, daß die verschiedenen $G\mathfrak{n}$ paarweise den Durchschnitt 0 haben, so ist nun leicht zu sehen, daß der ganze Darstellungsmodul $\mathfrak{m}$ die direkte Summe geeigneter $G\mathfrak{n}$ ist, also $\mathfrak{N}$ vollständig in irreduzible Teile gleichen Grades zerfällt.

Der Beweis zeigt noch, daß die Anzahl der Bestandteile von $\mathfrak{N}$ nicht größer sein kann als der Index von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}$.

Satz 2. $\mathfrak{G}$ sei irreduzibel über K, $\mathfrak{N} \lhd \mathfrak{G}$; $\mathfrak{N}$ zerfalle über K in irreduzible Bestandteile, die nicht alle äquivalent sind. Fassen wir die Teilmoduln $\mathfrak{n}_i$ des Darstellungsmoduls $\mathfrak{m}$, auf welchen $\mathfrak{N}$ äquivalente, über K irreduzible

Darstellungen bewirkt, zu Teilmoduln $\mathfrak{r}_i$ zusammen, so werden die $\mathfrak{r}_i$ von $\mathfrak{G}$ transitiv vertauscht, sind also Imprimitivitätsgebiete von $\mathfrak{G}$ (SPEISER [15], S. 197). Ist $\mathfrak{G}_1$ diejenige Untergruppe von $\mathfrak{G}$, welche $\mathfrak{r}_1$ in sich überführt, so hat $\mathfrak{G}_1$ die Gestalt

$$\mathfrak{G}_1 = \begin{pmatrix} B(\mathfrak{G}_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

(in geeigneten Koordinaten), und $B(\mathfrak{G}_1)$ ist irreduzibel über K.

Beweis. $\mathfrak{N}$ besitze die über K irreduziblen, inäquivalenten Bestandteile $F_i(\mathfrak{N})$ jeweils mit der Vielfachheit j_i. Der Teilmodul $\mathfrak{r}_1$ von $\mathfrak{m}$ erfahre die Darstellung $F_1(\mathfrak{N})$ mit der Vielfachheit j_1. Aus $GN = GNG^{-1}G = N^{G^{-1}}G$ folgt $GN\mathfrak{r}_1 = G\mathfrak{r}_1 = N^{G^{-1}}(G\mathfrak{r}_1)$. Somit ist $G\mathfrak{r}_1$ invariant unter $\mathfrak{N}$, und die Operatormoduln $(\mathfrak{r}_1|\mathfrak{N})$ und $(G\mathfrak{r}_1|\mathfrak{N}^{G^{-1}})$ sind isomorph. Daher zerfällt auch $G\mathfrak{r}_1$ unter $\mathfrak{N}$ in j_1 äquivalente irreduzible Teile. Wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{G}$ spannen die $G\mathfrak{r}_i$ ganz $\mathfrak{m}$ auf.

Ist $\mathfrak{d} = G\mathfrak{r}_1 \cap H\mathfrak{r}_1 \neq 0$, so hat $\mathfrak{N}$ auf $\mathfrak{d}$, $G\mathfrak{r}_1$ und $H\mathfrak{r}_1$ nur äquivalente irreduzible Bestandteile $F_i(\mathfrak{N})$. Da $G\mathfrak{r}_1$ [wie $\mathfrak{r}_1$ für $F_1(\mathfrak{N})$] ein maximaler Teilmodul mit dieser Eigenschaft ist, folgt $G\mathfrak{r}_1 = H\mathfrak{r}_1$.

Nun folgt leicht, daß $\mathfrak{m}$ die direkte Summe derjenigen $\mathfrak{r}_i = G\mathfrak{r}_1$ ist, welche Vielfache verschiedener irreduzibler Darstellungen $F_i(\mathfrak{N})$ unter $\mathfrak{N}$ erfahren. Diese $\mathfrak{r}_i$ werden von $\mathfrak{G}$ vertauscht, und zwar transitiv, da $\mathfrak{G}$ über K irreduzibel ist.

Nun zeigen wir noch, daß $\mathfrak{r}_1$ unter $B(\mathfrak{G}_1)$ irreduzibel ist. Sei $\mathfrak{s}$ ein unter $B(\mathfrak{G}_1)$ invarianter, von 0 verschiedener Teilmodul von $\mathfrak{r}_1$. Sind $G_1 = E$, $G_2, \dots, G_k$ Vertreter von $\mathfrak{G}_1$ in $\mathfrak{G}$, so ist die direkte Summe $G_1\mathfrak{s} + \cdots + G_k\mathfrak{s}$ der $G_i\mathfrak{s}$ invariant unter $\mathfrak{G}$, fällt daher mit $\mathfrak{m}$ zusammen. Aus $\mathfrak{m} = G_1\mathfrak{r}_1 + \cdots + G_k\mathfrak{r}_1$ und $G_i\mathfrak{s} \subseteq G_i\mathfrak{r}_1$ folgt nun $G_1\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_1 = G_1\mathfrak{s} = \mathfrak{s}$, also die Irreduzibilität von $B(\mathfrak{G}_1)$ auf $\mathfrak{r}_1$.

Während die bisherigen Resultate nur die Irreduzibilität von $\mathfrak{G}$ über einem beliebigen Körper K erfordern, benötigen wir im Beweis von Satz 3 das Schursche Lemma mit seiner scharfen Aussage für irreduzible Gruppen über algebraisch abgeschlossenen Körpern, müssen daher die Irreduzibilität der Bestandteile des Normalteilers $\mathfrak{N}$ beim Übergang zur algebraisch abgeschlossenen Hülle von K voraussetzen.

Satz 3. $\mathfrak{G}$ sei irreduzibel über K; der Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ zerfalle in n_1 äquivalente Teile $A(\mathfrak{N})$ vom Grad n_2, welche noch über der algebraisch abgeschlossenen Hülle von K irreduzibel sind. Dann läßt jedes Element $G \in \mathfrak{G}$ sich zerlegen in ein Kronecker-Produkt $G = G_1 \times G_2$ mit Grad $G_i = n_i$. Die G_i sind bis auf Faktoren aus K bestimmt und bilden projektive, über K irreduzible Darstellungen $P_i(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$. P_1 ist sogar eine projektive Darstellung von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$.

Beweis. Bei geeignetem Koordinatensystem ist

$$\mathfrak{N} = \begin{pmatrix} A(\mathfrak{N}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A(\mathfrak{N}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A(\mathfrak{N}) \end{pmatrix}$$

[n_1 Bestandteile $A(\mathfrak{N})$]. Mit der entsprechenden Unterteilung $G = (G_{ij})$ $(i, j = 1, \dots, n_1)$ wird dann

$$G_{ij} A(N) = A(GNG^{-1}) G_{ij}.$$

Da nicht alle G_{ij} verschwinden, sind $A(\mathfrak{N})$ und $A(G\mathfrak{N}G^{-1})$ nach dem Schurschen Lemma äquivalent, und das Element G_{ij} ist bis auf einen skalaren Faktor bestimmt, also $G_{ij} = p_{ij} P$ und $G = (p_{ij}) \times P$. Die Matrizen (p_{ij}) und P bilden, wie leicht zu sehen ist, projektive Darstellungen $P_1(\mathfrak{G})$ und $P_2(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ der Grade n_1 und n_2. Die Gestalt von $\mathfrak{N}$ zeigt, daß auf $\mathfrak{N}$ gilt $(p_{ij}) = c E_{n_1}$, also P_1 eine Darstellung von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ist (mit E_{n_1} bezeichnen wir dabei die n_1-reihige Einheitsmatrix). Die Irreduzibilität der $P_i(\mathfrak{G})$ über K folgt sofort aus der Irreduzibilität von $\mathfrak{G}$ über K.

Die Sätze 1 bis 3 werden im folgenden immer wieder herangezogen werden. Bevor wir zu einfachen Anwendungen übergehen, geben wir noch drei bekannte Hilfssätze an:

Hilfssatz 1. Sei $\mathfrak{G}$ irreduzibel über dem Körper K der Charakteristik p. Dann besitzt $\mathfrak{G}$ keinen Normalteiler von einer p-Potenzordnung $p^a > 1$.

Beweis. Angenommen, es sei $\mathfrak{N} \lhd \mathfrak{G}$ und $|\mathfrak{N}| = p^a > 1$. Dann ist auch das Zentrum $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ von $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ mit $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = p^b > 1$. Die absolut irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ haben den Grad 1. Da kein Erweiterungskörper von K primitive p-te Einheitswurzeln enthält, ist die identische Darstellung die einzige absolut irreduzible Darstellung von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$, und diese läßt sich schon über K angeben. Also läßt sich $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ über K auf Dreiecksgestalt bringen. Der Teilmodul $\mathfrak{n}$ des Darstellungsmoduls $\mathfrak{m}$, auf welchem $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ die identische Darstellung bewirkt, erfüllt daher $0 < \mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ und ist invariant unter $\mathfrak{G}$, entgegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{G}$. Damit haben wir den gewünschten Widerspruch erhalten.

Hilfssatz 2. Sei $\mathfrak{A}$ eine abelsche, über $GF(p^l)$ irreduzible Gruppe. Dann ist $\mathfrak{A}$ zyklisch. Ist A ein erzeugendes Element von $\mathfrak{A}$, so ist das charakteristische Polynom $\varphi(x)$ von A irreduzibel über $GF(p^l)$.

Beweis. Siehe Huppert [9], S. 416, Hilfssatz 4. Dort wird der Satz nur für $GF(p)$ formuliert, aber der Beweis überträgt sich unverändert auf den vorliegenden allgemeineren Fall.

Hilfssatz 3. Sei $\mathfrak{G}$ irreduzibel über dem Körper K. Das Zentrum der von den Matrizen von $\mathfrak{G}$ erzeugten einfachen Algebra sei separabel über K. Ist L eine galoissche Erweiterung von K, so haben die irreduziblen Bestandteile von $\mathfrak{G}$ über L alle den gleichen Grad und sind treu. Wählen wir L

genügend groß, so können wir erreichen, daß $\mathfrak{G}$ über L in absolut irreduzible, treue Bestandteile gleichen Grades vollständig zerfällt.

Beweis. Unter den vorliegenden Umständen zerfällt $\mathfrak{G}$ vollständig über L in solche Bestandteile, die durch Automorphismen von L über K ineinander übergehen, insbesondere also gleichen Grad haben und treu sind [v. d. WAERDEN [17], S. 69 (3)]. Wählen wir L als galoisschen Zerfällungskörper der zu $\mathfrak{G}$ gehörigen Algebra, so folgt die zweite Behauptung.

Bei den späteren Anwendungen von Hilfssatz 3 wird K entweder der komplexe Zahlkörper oder ein Galois-Feld sein. Die Voraussetzung, daß das Zentrum der von $\mathfrak{G}$ erzeugten Algebra über K separabel ist, ist dann sicher erfüllt.

Wir kommen zu ersten Anwendungen:

Satz 4. $\mathfrak{G}$ sei irreduzibel über dem algebraisch abgeschlossenen Körper K der Charakteristik 0; der Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ zerfalle in n absolut irreduzible Teile. Ist $|\mathfrak{G}/\mathfrak{N}|$ endlich, so ist n ein Teiler von $|\mathfrak{G}/\mathfrak{N}|$.

Beweis. Entsprechend den Sätzen 1 und 2 sei

$$\mathfrak{N} = \begin{pmatrix} E_k \times A_1(\mathfrak{N}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_k \times A_2(\mathfrak{N}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & E_k \times A_m(\mathfrak{N}) \end{pmatrix}$$

mit $n = km$ und inäquivalenten $A_i(\mathfrak{N})$. Ist $m > 1$, so ist $\mathfrak{G}$ nach Satz 2 imprimitiv. Die Teilmoduln $\mathfrak{r}_i$ $(i = 1, \dots, m)$ werden von $\mathfrak{G}$ transitiv permutiert. Ist $\mathfrak{G}_1$ diejenige Untergruppe von $\mathfrak{G}$, welche $\mathfrak{r}_1$ fest läßt, so hat $\mathfrak{G}_1$ die Gestalt

$$\mathfrak{G}_1 = \begin{pmatrix} B(\mathfrak{G}_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

und nach einem bekannten Satz über transitive Permutationsgruppen ist $m = |\mathfrak{G} : \mathfrak{G}_1|$.

Nun betrachten wir die Darstellung $B(\mathfrak{G}_1)$ von $\mathfrak{G}_1$, unter der $\mathfrak{N}$ in k Teile $A_1(\mathfrak{N})$ zerfällt. $B(\mathfrak{G}_1)$ ist nach Satz 2 irreduzibel über dem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Für $B(\mathfrak{G}_1)$ liegt also die Situation von Satz 3 vor, woraus $B(\mathfrak{G}_1) = P_1(\mathfrak{G}_1) \times P_2(\mathfrak{G}_1)$ mit projektiven, absolut irreduziblen Darstellungen $P_i(\mathfrak{G}_1)$ folgt. $P_1(\mathfrak{G}_1)$ ist nach Satz 3 sogar eine projektive Darstellung der endlichen Gruppe $\mathfrak{G}_1/\mathfrak{N}$ vom Grad k und ist irreduzibel über K. Nach SCHUR [14] (Satz VII a) ist dann $k \mid |\mathfrak{G}_1/\mathfrak{N}|$. Insgesamt folgt jetzt

$$n = km \mid |\mathfrak{G}_1/\mathfrak{N}| \, |\mathfrak{G} : \mathfrak{G}_1| = |\mathfrak{G}/\mathfrak{N}|,$$

also die Behauptung.

Für den Spezialfall, daß $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ zyklisch ist, findet sich dieser Satz auch in CLIFFORD [3].

Aus Satz 4 folgt nun leicht ein von N. ITÔ für endliche Gruppen angegebener Satz über die Grade absolut irreduzibler Darstellungen (N. ITÔ [10]):

Satz 5. Sei $\mathfrak{G}$ irreduzibel vom Grad n über dem algebraisch abgeschlossenen Körper K der Charakteristik 0, $\mathfrak{A}$ ein abelscher Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Ist $|\mathfrak{G}/\mathfrak{A}|$ endlich, so gilt $n \mid |\mathfrak{G}/\mathfrak{A}|$.

Beweis. Da $\mathfrak{A}$ abelsch ist, zerfällt es in n Teile vom Grad 1. Nach Satz 4 folgt nun $n \mid |\mathfrak{G}/\mathfrak{A}|$.

N. ITÔ hatte seinen Satz durch eine geschickte Rechnung mit Charakteren bewiesen. In unseren Beweis scheinen die Charaktere nicht einzugehen; aber die Herleitung des im Beweis von Satz 4 verwendeten Satzes von SCHUR benötigt Gruppencharaktere, so daß unser Beweis von Satz 5 nicht „charakterfrei" ist.

§ 2. Das Induktionsprinzip

Bei einem großen Teil der Beweise in den folgenden Paragraphen verwenden wir einen Induktionsschluß nach dem Grad n der auflösbaren Gruppe $\mathfrak{G}$. Für Gruppen vom Grad 1 ist die Behauptung jeweils trivial, so daß die Induktionsbasis stets gesichert ist. Der Grundgedanke des Induktionsverfahrens ist folgender: Die Sätze 1 bis 3 liefern Informationen über $\mathfrak{G}$, sofern reduzible Normalteiler von $\mathfrak{G}$ vorhanden sind. Da eine auflösbare Gruppe $\mathfrak{G}$ stets nichttriviale abelsche Normalteiler besitzt, welche über geeigneten Körpern reduzibel sind, können wir hoffen, auf diese Weise die auflösbaren linearen Gruppen in die Hand zu bekommen. Bei der Beschreibung des Induktionsverfahrens beschränken wir uns der Einfachheit halber auf endliche Gruppen $\mathfrak{G}$, die über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K irreduzibel sind. Jedoch formulieren wir die grundlegenden Hilfssätze I bis III gleich so, daß sie auch die späteren Fälle mit umfassen.

Je nach dem Zerfallen der Normalteiler von $\mathfrak{G}$ gehen wir verschieden vor:

Fall 1. $\mathfrak{G}$ enthalte einen Normalteiler $\mathfrak{N}$, der inäquivalente irreduzible Bestandteile besitzt. Nach Satz 2 ist dann $\mathfrak{G}$ imprimitiv. Sei $\mathfrak{D}$ derjenige Normalteiler von $\mathfrak{G}$, welcher alle Imprimitivitätsgebiete $\mathfrak{r}_i$ fest läßt. Ist k die Anzahl der Imprimitivitätsgebiete, so zerfällt $\mathfrak{D}$ vollständig in k Teile vom Grad n/k. Auf die Bestandteile von $\mathfrak{D}$ können wir nun unsere jeweilige Induktionsannahme anwenden. Die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ ist isomorph zu einer Permutationsgruppe $\mathfrak{P}_k$ vom Grad k, welche wir als lineare Gruppe vom Grad k über dem komplexen Zahlkörper C auffassen wollen. Ist $k < n$, so haben wir in $\mathfrak{P}_k$ eine Gruppe von kleinerem Grad erhalten. Für $k = n$ (d.h. $\mathfrak{G}$ monomial) ist noch eine besondere Betrachtung nötig: $\mathfrak{P}_k$ ist vollständig reduzibel und enthält mindestens einmal die identische Darstellung, ist daher isomorph zu einer Gruppe vom Grad $k-1$. Damit sind wir wieder zu einer Gruppe kleineren Grades gekommen, auf welche wir die Induktionsannahme anwenden können.

Schließlich sind noch die Resultate für $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{D} \cong \mathfrak{P}_k$ zu der gewünschten Aussage über $\mathfrak{G}$ zusammenzusetzen.

Fall 2. Nun habe $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler $\mathfrak{N}$, der in $n_1 > 1$ absolut irreduzible gleiche Teile vom Grad $n_2 > 1$ zerfällt. Nach Satz 3 läßt sich dann $\mathfrak{G}$ zerlegen in ein Kronecker-Produkt $\mathfrak{G} = P_1(\mathfrak{G}) \times P_2(\mathfrak{G})$. Indem wir durch Übergang zu einer assoziierten Darstellung von $P_i(\mathfrak{G})$ die Darstellungsmatrizen auf Determinante 1 normieren, erreichen wir, daß das Faktorensystem $a_{S,T}$ aus lauter n-ten Einheitswurzeln besteht[2]). Nun nehmen wir zu den Darstellungsmatrizen von $P_i(\mathfrak{G})$ alle Matrizen $a_{S,T}E$ hinzu. So entsteht eine lineare Gruppe $\mathfrak{K}_i = \mathfrak{K}(P_i(\mathfrak{G}))$. Dabei ist $\mathfrak{K}_i$ eine zentrale Erweiterung einer endlichen zyklischen Gruppe mit einem homomorphen Bild von $\mathfrak{G}$, ist daher endlich und auflösbar[3]). Da die $\mathfrak{K}_i$ die Grade $n_i < n$ haben, können wir unsere Induktionsannahme auf sie anwenden. Es bleibt dann die Aufgabe, aus den Resultaten über die $\mathfrak{K}_i$ die gewünschte Aussage für $\mathfrak{G}$ zu folgern.

Fall 3. Schließlich ist es noch möglich, daß jeder reduzible Normalteiler von $\mathfrak{G}$ lauter gleiche Bestandteile vom Grad 1 hat, also im Zentrum $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ liegt. Insbesondere liegt dann jeder abelsche Normalteiler von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$. Dieser Fall, in dem die reduziblen Normalteiler von $\mathfrak{G}$ keine nützliche Aussage über $\mathfrak{G}$ liefern, erfordert eine eingehende Betrachtung der minimalen nichtabelschen Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

Die nun vorliegenden Verhältnisse beschreiben wir in drei wichtigen Hilfssätzen, welche für Anwendungen in einer späteren Arbeit allgemeiner formuliert werden, als es im Augenblick nötig ist; bei den Anwendungen in der vorliegenden Arbeit wird die Gruppe $\mathfrak{A}$ stets aus Matrizen der Gestalt aE bestehen, so daß dann $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{A}$ gilt.

Hilfssatz I (Struktur minimaler nichtabelscher Normalteiler).

Voraussetzung. Sei $\mathfrak{G}$ auflösbar, nichtabelsch, linear vom Grad n über dem Körper K. Sei $\mathfrak{A}$ ein maximaler abelscher Normalteiler von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{A}$ sei zyklisch.

Behauptung. Ist $\mathfrak{N}$ ein endlicher, minimaler nichtabelscher Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{N} \leq \mathfrak{C}(\mathfrak{A})$, so gilt

1. $\mathfrak{N}$ ist nilpotent von der Klasse 2 und hat Primzahlpotenzordnung q^b.
2. $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ ist ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$, ist daher elementar abelsch.
3. $\mathfrak{N}'$ hat die Ordnung q und liegt, ebenso wie $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$, in $\mathfrak{A}$.
4. Ist $q > 2$, so gilt für alle $N \in \mathfrak{N}$ die Gleichung $N^q = E$.
5. Ist $q = 2$, so gilt für $N \in \mathfrak{N}$ stets $N^4 = E$.
6. Ist $\mathfrak{G}$ irreduzibel über K, so gilt Char. $K \neq q$. Ist $K = GF(p^f)$ und besteht $\mathfrak{A}$ nur aus Matrizen der Gestalt aE, so ist $q \mid p^f - 1$.

[2]) Die $a_{S,T}$ sind erklärt durch $P_i(S)\,P_i(T) = a_{S,T}^{(i)}\,P_i(ST)$ (SCHUR [14]).

[3]) Die Konstruktion von $\mathfrak{K}(P_i(\mathfrak{G}))$ ist der Schurschen Konstruktion der Darstellungsgruppe nachgebildet, führt aber in dieser einfachen Form nur zu einer von P_i abhängigen Gruppe $\mathfrak{K}_i$ (SCHUR [14]).

Beweis.

1. Die Kommutatorgruppe $\mathfrak{N}'$ von $\mathfrak{N}$ ist von $\mathfrak{N}$ verschieden und invariant in $\mathfrak{G}$. Wegen der Wahl von $\mathfrak{N}$ ist daher $\mathfrak{N}'$ abelsch. Aus $\mathfrak{N}' \leqq \mathfrak{N} \leqq \mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ folgt nun, daß auch $\mathfrak{A}\mathfrak{N}'$ ein abelscher Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist. Da aber $\mathfrak{A}$ ein maximaler abelscher Normalteiler ist, erhalten wir $\mathfrak{N}' \leqq \mathfrak{A}$. Insbesondere ist dann $\mathfrak{N}' \leqq \mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$, also $\mathfrak{N}$ nilpotent von der Klasse 2. $\mathfrak{N}$ besitzt mindestens eine nichtabelsche Sylow-Gruppe $\mathfrak{N}_q$. Diese ist invariant in $\mathfrak{G}$, fällt daher mit $\mathfrak{N}$ zusammen. Damit haben wir $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_q$ und $|\mathfrak{N}| = q^b$.

2. Ist $\mathfrak{U}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{U} < \mathfrak{N}$, so ist $\mathfrak{U}$ wegen der Wahl von $\mathfrak{N}$ abelsch. Da $\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ liegt, ist wieder $\mathfrak{A}\mathfrak{U}$ abelsch, also wie unter 1. $\mathfrak{U} \leqq \mathfrak{A}$. Es folgt $\mathfrak{U} \leqq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{A} \leqq \mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$, und insbesondere für $\mathfrak{U} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ dann $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}) \leqq \mathfrak{A}$. Also ist $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$, daher elementar abelsch. Für jedes $N \in \mathfrak{N}$ gilt dann $N^q \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$.

3. Die Behauptung $\mathfrak{N}' \leqq \mathfrak{A}$ hatte sich schon unter 1. ergeben, $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}) \leqq \mathfrak{A}$ unter 2. Also ist $\mathfrak{N}'$ zyklisch. Wegen $N^q \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ folgt für beliebige $N_1, N_2 \in \mathfrak{N}$ (Zassenhaus [22], S. 57, Formel (9))

$$(N_1, N_2)^q = (N_1^q, N_2) = E$$

und daher $|\mathfrak{N}'| = q$.

4. Ist $q > 2$, so gilt wegen $|\mathfrak{N}'| = q$ die Gleichung (Zassenhaus [22], S. 57, Formel (10))

$$(N_1 N_2)^q = (N_2, N_1)^{\binom{q}{2}} N_1^q N_2^q = N_1^q N_2^q.$$

Also bilden die Elemente der Ordnung q von $\mathfrak{N}$ zusammen mit E eine charakteristische Untergruppe $\Omega_1(\mathfrak{N})$ von $\mathfrak{N}$.

Angenommen, $\Omega_1(\mathfrak{N})$ sei abelsch. Dann ist $\mathfrak{N} = \Omega_1(\mathfrak{N})$, also nach 2. $\Omega_1(\mathfrak{N}) \leqq \mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$, und $\Omega_1(\mathfrak{N})$ ist zyklisch. Somit enthält $\mathfrak{N}$ nur eine Untergruppe der Ordnung q. Wegen $q > 2$ ist dann $\mathfrak{N}$ bekanntlich selbst zyklisch (Zassenhaus [22], S. 112, Satz 15), im Widerspruch zu $\mathfrak{N}' \neq \mathfrak{E}$.

$\Omega_1(\mathfrak{N})$ ist also invariant in $\mathfrak{G}$ und nichtabelsch, woraus dann $\mathfrak{N} = \Omega_1(\mathfrak{N})$ folgt.

5. Für $q = 2$ bilden wegen $|\mathfrak{N}'| = 2$ und

$$(N_1 N_2)^4 = (N_2, N_1)^{\binom{4}{2}} N_1^4 N_2^4 = N_1^4 N_2^4$$

(Zassenhaus [22], S. 57, Formel (10)) die in $\mathfrak{N}$ liegenden Lösungen von $N^4 = E$ eine charakteristische Untergruppe $\Omega_2(\mathfrak{N})$ von $\mathfrak{N}$. Da $\mathfrak{N}$ nicht nur eine Untergruppe der Ordnung 4 enthält (Zassenhaus [22], S. 113, Satz 16), ist $\Omega_2(\mathfrak{N})$ nicht abelsch, somit $\Omega_2(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$.

6. Ist Char. $K = p$, so kann wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{G}$ über K die Ordnung von $\mathfrak{N}$ keine Potenz von p sein (Hilfssatz 1). Also ist $q \neq p$. Falls $\mathfrak{A}$ nur aus Matrizen der Gestalt aE besteht, so auch $\mathfrak{N}'$ nach 3.; für $K = GF(p^f)$ haben wir dann $q = |\mathfrak{N}'| \mid p^f - 1$.

Hilfssatz II (Einbettung von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}$).

Voraussetzung. Wie in Hilfssatz I.

Behauptung.

1. Ist $\mathfrak{N}$ irreduzibel über K und K endlich oder K algebraisch abgeschlossen, so ist der Zentralisator $\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}$ gleich $\mathfrak{A}$.

2. Sei $\mathfrak{C}(\mathfrak{H})$ der Zentralisator des Hauptfaktors $\mathfrak{H}=\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ von $\mathfrak{G}$. Ist $|\mathfrak{H}|=q^c$, so ist $\{\mathfrak{C}(\mathfrak{H})\cap\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))\}/\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ isomorph zu einer Untergruppe des c-fachen direkten Produktes von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ mit sich selbst.

3. Wir fassen die Faktorgruppe $\mathfrak{H}$ als Modul der Dimension c über $GF(q)$ auf. Durch Transformation mit Elementen aus $\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))$ werden dann auf $\mathfrak{H}$ lineare Abbildungen bewirkt, welche eine nichtausgeartete schiefe Bilinearform mit Werten aus $GF(q)$ invariant lassen. Daher ist $\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))/\{\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))\cap\mathfrak{C}(\mathfrak{H})\}$ isomorph zu einer Untergruppe der symplektischen Gruppe $C(2m, q)$ vom Grad $c=2m$ über $GF(q)$.

Beweis.

1. Wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{N}$ über dem Körper K ist $\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ nach dem Schurschen Lemma Untergruppe der multiplikativen Gruppe eines Schiefkörpers S. Ist K endlich, so ist S (als Teilring des vollen Matrizenringes vom Grad n über K) endlich, daher nach dem Satz von WEDDERBURN-WITT (ZASSENHAUS [22], S. 70) kommutativ. Also ist $\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ abelsch. Ist K algebraisch abgeschlossen, so folgt die Behauptung sofort aus der Aussage des Schurschen Lemmas für diesen Fall.

Wegen $\mathfrak{N}\leqq\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ gilt $\mathfrak{A}\leqq\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$. Da aber $\mathfrak{A}$ ein maximaler abelscher Normalteiler ist, folgt nun $\mathfrak{A}=\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$.

2. Nach Hilfssatz I.3 ist $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ zyklisch; denn $\mathfrak{A}$ ist zyklisch. Sei nun $C\in\mathfrak{C}(\mathfrak{H})\cap\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))$, Z ein erzeugendes Element von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ und $N_1, \ldots, N_c$ Vertreter einer Basis von $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$. Dann gilt

$$C N_i C^{-1} = N_i Z^{a_i} \qquad (i = 1, \ldots, c).$$

Durch $C\to(Z^{a_1}, \ldots, Z^{a_c})$ wird dann ein Homomorphismus von $\mathfrak{C}(\mathfrak{H})\cap\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))$ in das direkte Produkt von c Gruppen vom Typ $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ vermittelt. Der Kern dieses Homomorphismus ist offenbar $\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$.

3. Ist K ein erzeugendes Element von $\mathfrak{N}'$, so definieren wir eine schiefe Bilinearform $f(N_1, N_2)$ auf $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ durch

$$(N_1, N_2) = K^{f(N_1, N_2)}.$$

Offenbar hängt f nur von den Restklassen der N_i mod $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ ab, kann daher als Funktion auf $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ aufgefaßt werden. Wegen $|\mathfrak{N}'|=q$ ist der Wert von f ein Element von $GF(q)$.

Aus $(N_1, N_2)=(N_2, N_1)^{-1}$ folgt $f(N_1, N_2)=-f(N_2, N_1)$, d.h. f ist schief.

Wegen $\mathfrak{N}' \leq \mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ gilt (Zassenhaus [22], S. 57, Formel (7a))

$$(N_1 N_2, N_3) = (N_1, N_3)(N_2, N_3),$$

also $f(N_1 N_2, N_3) = f(N_1, N_3) + f(N_2, N_3)$, d.h. f ist additiv.

Für $G \in \mathfrak{G}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))$ ist wegen $\mathfrak{N}' \leq \mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$

$$(N_1^G, N_2^G) = K^{f(N_1^G, N_2^G)} = (N_1, N_2)^G = [K^{f(N_1, N_2)}]^G = K^{f(N_1, N_2)},$$

also $f(N_1^G, N_2^G) = f(N_1, N_2)$, und f ist invariant.

Schließlich ist f nicht ausgeartet, daher bekanntlich c gerade: Aus $f(X, N) = 0$ für alle $N \in \mathfrak{N}$ folgt nämlich $X \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$, so daß dem Element X im Modul $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ das Nullelement entspricht.

Da $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ ein Hauptfaktor von $\mathfrak{G}$ ist, muß die von den inneren Automorphismen von $\mathfrak{G}$ auf dem Modul $\mathfrak{H}$ bewirkte Gruppe über $GF(q)$ irreduzibel sein.

Hilfssatz III (Darstellungen von $\mathfrak{N}$).

Voraussetzung. Wie in Hilfssatz I.

Behauptung.

1. Sei $K \subseteq L$, Char. $K \neq q$ und $D(\mathfrak{N})$ eine Darstellung von $\mathfrak{N}$ über L. Dann läßt sich $D(\mathfrak{N})$ in dem Oberkörper J des Primkörpers P von K auf monomiale Gestalt bringen, wenn J für $q > 2$ primitive q-te Einheitswurzeln, für $q = 2$ primitive 4-te Einheitswurzeln enthält.

2. Ist k der Grad einer treuen, absolut irreduziblen Darstellung von $\mathfrak{N}$ über einem Körper L mit Char. $L \neq q$, so gilt $k^2 = |\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = q^{2m}$, also $k = q^m$.

3. Ist $D(\mathfrak{N})$ treu und irreduzibel vom Grad k über $K = GF(p^l)$ und $p^l \equiv 1 (q)$ für $q > 2$, $p^l \equiv 1 (4)$ für $q = 2$, so ist $D(\mathfrak{N})$ absolut irreduzibel und $k = q^m$.

4. Ist $q = 2$ und $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = 2$, so besitzt $\mathfrak{N}$ über jedem Körper L mit Char. $L \neq 2$, welcher primitive 4-te Einheitswurzeln enthält, genau eine absolut irreduzible, treue Darstellung; diese hat den Grad 2^m.

Beweis.

1. Der bekannte Beweis dafür, daß sich jede Darstellung einer q-Gruppe über dem komplexen Zahlkörper C auf monomiale Gestalt bringen läßt (Speiser [15], S. 196) beruht allein auf der Tatsache, daß sich die Darstellungen jeder abelschen Untergruppe von $\mathfrak{N}$ über C auf Diagonalgestalt bringen lassen.

Ist Char. $K \neq q$, so läßt sich jede Darstellung einer abelschen Untergruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{N}$ auf Diagonalgestalt bringen, und zwar in jedem Körper, welcher alle Eigenwerte der Matrizen von $\mathfrak{B}$ enthält. Wegen 4. bzw. 5. von Hilfssatz I genügt jeder Oberkörper J von P, welcher primitive q-te bzw. primitive 4-te Einheitswurzeln enthält.

2. Wir bestimmen zunächst den Grad einer absolut irreduziblen, treuen Darstellung von $\mathfrak{N}$ über dem komplexen Zahlkörper C. Dabei verwenden wir eine Charakterrechnung von R. Frucht (Frucht [4], S. 20).

Wegen $\mathfrak{N}' \leq \mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ ist jeder Kommutator (N_1, N_2) von Elementen N_1 und N_2 aus $\mathfrak{N}$ nach dem Schurschen Lemma ein Vielfaches cE der Einheitsmatrix. Für $N \notin \mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ existiert dann ein $Y \in \mathfrak{N}$ mit $YNY^{-1}N^{-1} = cE \neq E$. Dann folgt für die Spur $S(N)$ von N

$$S(N) = S(YNY^{-1}) = S(YNY^{-1}N^{-1}N) = S(cN) = cS(N),$$

wegen $c \neq 1$ also $S(N) = 0$.

Somit haben alle nicht in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ liegenden Elemente von $\mathfrak{N}$ in der betrachteten Darstellung die Spur 0. Aus der bekannten Charakterrelation

$$\sum_{N \in \mathfrak{N}} |S(N)|^2 = |\mathfrak{N}|$$

ergibt sich nun

$$\sum_{Z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{N})} |S(Z)|^2 = |\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})|\, k^2 = |\mathfrak{N}|,$$

also $k^2 = |\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = q^{2m}$.

Diese Überlegungen gelten nur für den komplexen Zahlkörper. Aber das Ergebnis überträgt sich auf den Fall, daß die Charakteristik von L zur Ordnung von $\mathfrak{N}$ teilerfremd ist (s. BRAUER und NESBITT [1]); denn die irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{N}$ über L entstehen aus geeigneten irreduziblen Darstellungen über algebraischen Zahlkörpern endlichen Grades durch Restklassenbildung nach Primidealteilern $\mathfrak{p}$ von $p = \text{Char. } L$.

3. Wegen $p^f \equiv 1 (q)$ bzw. $p^f \equiv 1 (4)$ enthält $GF(p^f)$ primitive q-te bzw. 4-te Einheitswurzeln. Nach 1. dieses Hilfssatzes lassen sich dann die absolut irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{N}$ bereits in $GF(p^f)$ angeben. Da $D(\mathfrak{N})$ über $GF(p^f)$ irreduzibel ist, ist also $D(\mathfrak{N})$ sogar absolut irreduzibel. Aus 2. dieses Hilfssatzes folgt dann $k = q^m$.

4. Zunächst beschränken wir uns wieder auf den komplexen Zahlkörper C. Aus $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = 2$ folgt $\mathfrak{N}' = \mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$. Wegen $|\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = 2^{2m}$ hat $\mathfrak{N}$ genau 2^{2m} verschiedene Darstellungen vom Grad 1 über C. Aus der bekannten „Trennungseigenschaft" der absolut irreduziblen Darstellungen folgt, daß es über C eine absolut irreduzible Darstellung $D(\mathfrak{N})$ von $\mathfrak{N}$ gibt, welche $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ treu wiedergibt. Dann ist $D(\mathfrak{N})$ treu, da wegen $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = 2$ jeder Normalteiler von $\mathfrak{N}$ die Untergruppe $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ enthält. Nach 2. hat $D(\mathfrak{N})$ den Grad 2^m. Die Quadratsumme der Grade der bisher bestimmten Darstellungen beträgt

$$2^{2m} + 2^{2m} = 2^{2m+1} = |\mathfrak{N}|.$$

Damit ist die bekannte Vollständigkeitsrelation erfüllt, unsere Aufstellung der absolut irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{N}$ über C also vollständig.

Wie in 2. überträgt sich dieses Ergebnis auf jeden Körper L mit Char. $L \neq 2$, welcher primitive 4-te Einheitswurzeln enthält.

Nun können wir die Beschreibung des Induktionsverfahrens für den in dieser Arbeit allein interessierenden Fall $\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})) = \mathfrak{G}$ beenden: Ist $2m < n = q^m$,

so können wir auf die zu $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{C}(\mathfrak{H})$ isomorphe Untergruppe des symplektischen Gruppe $C(2m, q)$ unsere Induktionsannahme anwenden. (Es sei ausdrücklich vermerkt, daß wir an dieser Stelle Gruppen über Körpern mit von 0 verschiedener Charakteristik zu betrachten haben, selbst dann, wenn wir nur auf Resultate für den Fall „Charakteristik 0" abzielen.) Nun gilt es im speziellen Fall noch, die Ergebnisse über $\overline{\mathfrak{G}}$ (durch Induktion gewonnen), $\mathfrak{C}(\mathfrak{H})/\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ (aus Hilfssatz II.2) und $\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ (aus Hilfssatz II.1) zu einer Aussage über $\mathfrak{G}$ zusammenzusetzen. Der Sonderfall $2m \geqq n = q^m$ tritt nur für $n = 2$ und $n = 4$ ein und muß gesondert behandelt werden.

§ 3. Über die Darstellungen auflösbarer Gruppen

Alle in diesem Paragraphen auftretenden Gruppen $\mathfrak{G}$ seien endlich und auflösbar.

Satz 6. Sei $\mathfrak{G}$ irreduzibel und primitiv vom Grad n über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K der Charakteristik 0. Dann gilt $n^2 | |\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})|$.

Beweis durch Induktion nach n.

Da $\mathfrak{G}$ primitiv ist, enthalten die reduziblen Normalteiler von $\mathfrak{G}$ lauter äquivalente irreduzible Bestandteile. Alle abelschen Normalteiler liegen also im Zentrum $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ und bestehen aus Vielfachen von E. Also liegt Fall 3 von § 2 vor. Hat $\mathfrak{G}$ einen minimalen nichtabelschen Normalteiler $\mathfrak{N}$, der über K irreduzibel ist, so gilt nach Hilfssatz III.2 [mit $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ statt $\mathfrak{A}$] die Beziehung $n^2 = |\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})|$, also wegen $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ dann

$$n^2 = |\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = |\mathfrak{N}\,\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})/\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})|\,|\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})|.$$

Zu untersuchen bleibt noch der Fall, daß alle minimalen nichtabelschen Normalteiler reduzibel sind. Sei $\mathfrak{N}$ ein solcher, der in n_1 Teile $A(\mathfrak{N})$ vom Grad $n_2 > 1$ zerfalle. Wieder gelten für $\mathfrak{N}$ die Ergebnisse von Hilfssatz III und liefern $n_2^2 = |\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})|$. Der Normalteiler $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}\,\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ zerfällt in gleicher Weise wie $\mathfrak{N}$, und es ist

$$|\mathfrak{M}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})| = |\mathfrak{N}/\mathfrak{N} \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})| = |\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = n_2^2.$$

Entsprechend dem Zerfallen von $\mathfrak{M}$ haben wir nun nach Satz 3 die Produktzerlegung $\mathfrak{G} = P_1(\mathfrak{G}) \times P_2(\mathfrak{G})$ mit Grad $P_i(\mathfrak{G}) = n_i$. Die zu den $P_i(\mathfrak{G})$ gehörigen Gruppen $\mathfrak{K}_i$ sind absolut irreduzibel und primitiv, da $\mathfrak{G}$ diese Eigenschaften hat; denn einer Einteilung der Darstellungsmoduln $\mathfrak{m}_i$ der $\mathfrak{K}_i$ bzw. $P_i(\mathfrak{G})$ in invariante Teilmoduln oder Imprimitivitätsgebiete würde eine gleichartige Einteilung des Produktmoduls $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \times \mathfrak{m}_2$ entsprechen. Wegen $n_1 < n$ liefert uns nun die Induktionsannahme $n_1^2 | |\mathfrak{K}_1/\mathfrak{Z}(\mathfrak{K}_1)|$. Nun ist aber P_1 eine projektive Darstellung von $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$. Daher gilt $|\mathfrak{K}_1/\mathfrak{Z}(\mathfrak{K}_1)| \,||\, \mathfrak{G}/\mathfrak{M}|$. Insgesamt erhalten wir

$$n^2 = n_1^2\, n_2^2 \,||\, \mathfrak{G}/\mathfrak{M}|\,|\mathfrak{M}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})| = |\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})|,$$

was zu beweisen war.

Es sei noch bemerkt, daß in den Voraussetzungen von Satz 6 weder die Auflösbarkeit noch die Primitivität gestrichen werden können. Daß die Auflösbarkeit unentbehrlich ist, zeigt das Beispiel der treuen Darstellung der Ikosaedergruppe vom Grad 3; daß auf die Primitivität nicht verzichtet werden kann, lehrt die monomiale, absolut irreduzible Darstellung der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_3$ vom Grad 2.

Satz 7. Sei $\mathfrak{G}$ irreduzibel über dem algebraisch abgeschlossenen Körper K der Charakteristik p. Dann besitzt $\mathfrak{G}$ ein System von Imprimitivitätsgebieten $\mathfrak{r}_i$, deren Dimension nicht durch p teilbar ist. Ist insbesondere $n = p^a$, so läßt $\mathfrak{G}$ sich auf monomiale Gestalt bringen.

Beweis. Wir führen wieder eine Induktion nach dem Grad n von $\mathfrak{G}$ durch und betrachten nacheinander die drei Fälle von § 2.

Fall 1. Nun ist $\mathfrak{G}$ imprimitiv. Sei $\mathfrak{G}_1$ diejenige Untergruppe, welche $\mathfrak{r}_1$ fest läßt. Dann ist

$$\mathfrak{G}_1 = \begin{pmatrix} B(\mathfrak{G}_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

und $B(\mathfrak{G}_1)$ absolut irreduzibel (Satz 2). Ist die Dimension des Moduls $\mathfrak{r}_1$ noch durch p teilbar, so ist nach unserer Induktionsannahme auch $B(\mathfrak{G}_1)$ imprimitiv, und die Imprimitivitätsgebiete von $B(\mathfrak{G}_1)$ geben Anlaß zu einem System von Imprimitivitätsgebieten von $\mathfrak{G}$, welche kleinere Dimension als $\mathfrak{r}_1$ haben. Wählen wir also $\mathfrak{r}_1$ von minimaler Dimension, so ist diese Dimension zu p teilerfremd, was zu zeigen war.

Fall 2. Nun haben wir die Produktzerlegung $\mathfrak{G} = P_1(\mathfrak{G}) \times P_2(\mathfrak{G})$. Nach der Induktionsannahme zerfallen die Darstellungsmoduln $\mathfrak{m}_i$ der $P_i(\mathfrak{G})$ (bzw. der zugehörigen Gruppen $\mathfrak{N}_i$) in Imprimitivitätsgebiete $\mathfrak{r}_j^{(i)}$, deren Dimensionen zu p teilerfremd sind. Dann sind die Produktmoduln $\mathfrak{r}_j^{(1)} \times \mathfrak{r}_k^{(2)}$ Imprimitivitätsgebiete von $\mathfrak{G}$ und haben ebenfalls zu p teilerfremde Dimensionen.

Fall 3. Jetzt ist $\mathfrak{N}$ absolut irreduzibel, $|\mathfrak{N}| = q^b$ und $|\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = n^2 = q^{2m}$ (Hilfssatz III. 2). Ist $p \mid n$, so folgt $q = p$. Aber dies ist wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{G}$ nicht möglich, da $\mathfrak{G}$ keinen von $\mathfrak{E}$ verschiedenen Normalteiler von p-Potenzordnung besitzt (Hilfssatz 1).

Damit ist der Beweis von Satz 7 beendet.

Satz 8. Sei $\mathfrak{G}$ irreduzibel vom Grad n über dem algebraisch abgeschlossenen Körper K der Charakteristik O. Für jeden Primteiler p von n gebe es einen abelschen Normalteiler $\mathfrak{A}(p)$ von $\mathfrak{G}$ mit p-überauflösbarer Faktorgruppe[4]) $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}(p)$. Dann läßt sich $\mathfrak{G}$ über K auf monomiale Gestalt bringen.

[4]) Eine auflösbare Gruppe heißt p-überauflösbar, wenn alle Hauptfaktoren von p-Potenzordnung zyklisch sind.

Beweis. Wieder verwenden wir unser Induktionsverfahren.

Fall 1. Da sich die Voraussetzung über die Existenz eines abelschen Normalteilers mit p-überauflösbarer Faktorgruppe auf alle Untergruppen von $\mathfrak{G}$ überträgt, kann die über K irreduzible Darstellung $B(\mathfrak{G}_1)$ nach der Induktionsannahme monomial gemacht werden. Dann kann aber nach der üblichen Schlußweise (SPEISER [15], S. 197) auch ganz $\mathfrak{G}$ monomial gemacht werden.

Weiterhin können wir also annehmen, daß alle abelschen Normalteiler von $\mathfrak{G}$ in lauter äquivalente Teile vom Grad 1 zerfallen, daher im Zentrum $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ liegen. Daraus folgt, daß für die betrachteten p sogar $\mathfrak{G}$ selbst p-überauflösbar ist.

Fall 2. Nun ist $\mathfrak{G} = P_1(\mathfrak{G}) \times P_2(\mathfrak{G})$. Die $P_i(\mathfrak{G})$ entstehen aus geeigneten Gruppen $\mathfrak{K}_i$. Da aber die $\mathfrak{K}_i$ durch zentrale Erweiterung von zyklischen Gruppen mit homomorphen Bildern von $\mathfrak{G}$ gebildet sind, erfüllen auch die $\mathfrak{K}_i$ unsere Voraussetzung der p-Überauflösbarkeit bezüglich der p mit $p \mid n$. Wegen der absoluten Irreduzibilität von $\mathfrak{G}$ sind auch die $P_i(\mathfrak{G})$ absolut irreduzibel, dann aber auch die $\mathfrak{K}_i$. Da die Grade n_i der $P_i(\mathfrak{G})$ bzw. der $\mathfrak{K}_i$ Teiler von n sind, können wir unsere Induktionsannahme auf die $\mathfrak{K}_i$ anwenden und sehen, daß diese monomial gemacht werden können. Das gleiche gilt dann auch für die $P_i(\mathfrak{G})$ und deren Kronecker-Produkt $\mathfrak{G}$.

Fall 3. Nach Hilfssatz III.2 ist nun $|\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = n^2 = q^{2m}$. Daher tritt q als einziger Primteiler von n auf. Wegen unserer verschärften Voraussetzung ist also $\mathfrak{G}$ q-überauflösbar. Da $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ der Ordnung q^{2m} ist (Hilfssatz I.2), folgt $2m = 1$. Dies ist aber unmöglich. Also kann unter den vorliegenden Umständen Fall 3 nicht eintreten.

Damit haben wir bewiesen, daß sich $\mathfrak{G}$ über K auf monomiale Gestalt bringen läßt.

Satz 8 ist eine Verallgemeinerung des folgenden Ergebnisses von ZASSENHAUS (ZASSENHAUS [20], S. 207, Satz 10): Hat $\mathfrak{G}$ einen abelschen Normalteiler mit überauflösbarer Faktorgruppe, so läßt sich jede Darstellung von $\mathfrak{G}$ über dem komplexen Zahlkörper auf monomiale Gestalt bringen.

§ 4. Abschätzung der Stufe

ZASSENHAUS hat folgenden Satz bewiesen (ZASSENHAUS [21], Satz 7): Sei $\mathfrak{G}$ eine auflösbare lineare Gruppe vom Grad n. Dann liegt die Stufe von $\mathfrak{G}$ unterhalb einer nur von n abhängigen Schranke $k(n)$.

Der Beweis von ZASSENHAUS läßt sich zu einer Bestimmung von $k(n)$ ausbauen; jedoch wird die so erhaltene Schranke sehr schlecht, da der letzte Beweisschritt bei ZASSENHAUS die Abschätzung der Stufe aller auflösbaren, primitiven, unimodularen Gruppen $\mathfrak{G}$ vom Grad n mit

$$|\mathfrak{G}| \leq (n^{n^2} + 1)!\, n$$

erfordert. Wir geben ein wesentlich schärferes Ergebnis an:

Satz 9. Sei $\mathfrak{G}$ auflösbar vom Grad n. Dann ist $\mathfrak{G}^{(2n)} = \mathfrak{E}$.

Beweis. Wir verwenden wieder das Induktionsprinzip von § 2. Dabei unterscheiden sich die ersten Schritte nicht wesentlich von dem Beweisgang bei ZASSENHAUS; erst in d) weichen wir entscheidend ab.

In unsere Aussage geht der Körper K, dem die Elemente der Matrizen von $\mathfrak{G}$ entnommen sind, nicht ein, so daß wir zur algebraisch abgeschlossenen Hülle von K übergehen dürfen.

a) Zunächst sei $\mathfrak{G}$ reduzibel, also in geeigneten Koordinaten

$$\mathfrak{G} = \begin{pmatrix} A_{11}(\mathfrak{G}) & 0 \\ A_{21}(\mathfrak{G}) & A_{22}(\mathfrak{G}) \end{pmatrix}.$$

Ist Grad $A_{ii}(\mathfrak{G}) = n_i$ mit $n_1 + n_2 = n$, so liefert unsere Induktionsannahme

$$A_{ii}(\mathfrak{G})^{(2n_i)} = E_{n_i}.$$

Falls $n_1 \geqq n_2$, so besteht $\mathfrak{G}^{(2n_1)}$ aus Matrizen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} E_{n_1} & 0 \\ A & E_{n_2} \end{pmatrix}$$

und ist daher abelsch. Es folgt $\mathfrak{G}^{(2n_1+1)} = \mathfrak{E}$ und dann unter Beachtung von $n_1 < n$ auch $\mathfrak{G}^{(2n)} = \mathfrak{E}$.

Weiterhin können wir also annehmen, daß $\mathfrak{G}$ absolut irreduzibel ist, so daß nun die Fallunterscheidung von § 2 in Kraft tritt.

b) Es liege Fall 1 von § 2 vor, $\mathfrak{G}$ sei imprimitiv mit k Imprimitivitätsgebieten der Dimension m. Unsere Induktionsannahme zeigt jetzt $\mathfrak{D}^{(2m)} = \mathfrak{E}$. Ist $k < n$, so können wir auch auf $\mathfrak{P}_k \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ die Induktionsannahme anwenden und erhalten $\mathfrak{P}_k^{(2k)} = \mathfrak{E}$. Insgesamt ist also $\mathfrak{G}^{(2m \cdot 2k)} = \mathfrak{E}$. Wegen $km = n$ und $1 < k < n$ folgt nun $k + m \leqq n/2 + n/2 = n$, womit wir in diesem Falle fertig sind.

Es bleibt noch der Fall $k = n$ zu behandeln. Dann besteht $\mathfrak{D}$ aus Diagonalmatrizen, ist daher abelsch. Bei geeigneter Wahl der Koordinaten können wir $\mathfrak{P}_n$ über dem komplexen Zahlkörper C vollständig reduzieren in

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B_{22}(\mathfrak{P}_n) \end{pmatrix}.$$

Die Anwendung der Induktionsannahme auf die Gruppe $B_{22}(\mathfrak{P}_n)$ vom Grade $n-1$ liefert uns nun $B_{22}(\mathfrak{P}_n)^{(2n-2)} = \mathfrak{E}$, also auch $\mathfrak{P}_n^{(2n-2)} = \mathfrak{E}$. Wegen $\mathfrak{D}' = \mathfrak{E}$ folgt dann das gewünschte Resultat $\mathfrak{G}^{(2n)} = \mathfrak{E}$.

c) Jetzt betrachten wir Fall 2 mit der Produktzerlegung $\mathfrak{G} = P_1(\mathfrak{G}) \times P_2(\mathfrak{G})$ und Grad $P_i(\mathfrak{G}) = n_i > 1$. Auf die zu den $P_i(\mathfrak{G})$ bei geeignet normierten Faktorensystemen gehörigen Gruppen $\mathfrak{R}_i$ können wir wieder unsere Induktionsannahme anwenden. Ist etwa $n_1 \geqq n_2$, so erhalten wir

$$\mathfrak{R}_i^{(2n_1)} = \{E_{n_i}\}$$

und dann, da mit dem Kronecker-Produkt komponentenweise gerechnet wird (unter Beachtung einer eventuellen Rücknormierung des Faktorensystems) $\mathfrak{G}^{(2n_1)} = \{aE_n\}$, also $\mathfrak{G}^{(2n_1+1)} = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G}^{(2n)} = \mathfrak{E}$.

d) Zu behandeln bleibt noch der Fall 3. Jetzt ist $\mathfrak{G}$ primitiv. Nach Zassenhaus [21] (Satz 6) bilden dann die Elemente von $\mathfrak{G}$ mit Determinante 1 einen endlichen Normalteiler $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$ mit abelscher Faktorgruppe. Ist $\mathfrak{S}$ abelsch, so ist $\mathfrak{G}'' = \mathfrak{E}$ und unsere Behauptung offenbar richtig. Ist aber $\mathfrak{S}' \neq \mathfrak{E}$, so können wir nach b) und c) annehmen, daß auch $\mathfrak{S}$ absolut irreduzibel ist. Nun betrachten wir einen in $\mathfrak{S}$ liegenden, minimalen nichtabelschen Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{N}$ ist endlich. Nach b) und c) dürfen wir annehmen, daß auch $\mathfrak{N}$ absolut irreduzibel ist. Daher können wir die Hilfssätze II und III anwenden, und zwar mit $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))$.

Ist $2m < n = q^m$, so können wir auf die Gruppe $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{C}(\mathfrak{H})$ vom Grade $2m$ die Induktionsannahme anwenden. Wir bekommen so $\overline{\mathfrak{G}}^{(4m)} = \overline{\mathfrak{E}}$ und dann, da $\mathfrak{C}(\mathfrak{H})/\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ und $\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ abelsch sind (Hilfssatz II. 2 und II. 1) $\mathfrak{G}^{(4m+2)} = \mathfrak{E}$. Für $n \neq 2, 4$ ist aber $4m + 2 \leqq 2n = 2q^m$, womit unsere Behauptung in diesem Falle bewiesen ist.

Es bleiben noch die (auch schon durch die Bedingung $2m < q^m$ ausgeschlossenen) Fälle $n = 2$ und $n = 4$ zu betrachten.

Für $n = 2$ ist $\overline{\mathfrak{G}} \leqq GL(2, 2)$, daher $\overline{\mathfrak{G}}'' = \overline{\mathfrak{E}}$ und dann $\mathfrak{G}^{(4)} = \mathfrak{E}$. Etwas schwieriger ist der Fall $n = 4$. Dann ist $\overline{\mathfrak{G}}$ eine über $GF(2)$ irreduzible Untergruppe von $GL(4, 2)$ [sogar von $C(4, 2)$]. Das einzige Vielfache der Einheitsmatrix E, welches in $\overline{\mathfrak{G}}$ vorkommen kann, ist E selbst. Somit kann Fall 3 für $\overline{\mathfrak{G}}$ sicher nicht eintreten.

Ist $\overline{\mathfrak{G}}$ reduzibel über einem Erweiterungskörper L von $GF(2)$, so zerfällt es bei geeigneter Wahl von L nach Hilfssatz 3 vollständig in Bestandteile gleichen Grades, die also den Grad 1 oder 2 haben. Die Induktionsannahme liefert uns nun $\overline{\mathfrak{G}}^{(4)} = \overline{\mathfrak{E}}$ und dann $\mathfrak{G}^{(6)} = \mathfrak{E}$.

Nun trete für $\overline{\mathfrak{G}}$ der Fall 1 ein, d. h. $\overline{\mathfrak{G}}$ sei imprimitiv über einem geeigneten Erweiterungskörper von $GF(2)$. Ist $\overline{\mathfrak{G}}$ monomial, so ist $\overline{\mathfrak{P}}_4$ eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_4$, und wir erhalten $\overline{\mathfrak{P}}_4^{(3)} = \overline{\mathfrak{E}}$, dann $\overline{\mathfrak{G}}^{(4)} = \overline{\mathfrak{E}}$ und daher $\mathfrak{G}^{(6)} = \mathfrak{E}$. Haben die Imprimitivitätsgebiete von $\overline{\mathfrak{G}}$ den Grad 2, so ist $k = 2$, also $\overline{\mathfrak{P}}_2' = \overline{\mathfrak{E}}$ und $\overline{\mathfrak{G}}' \leqq \overline{\mathfrak{D}}$. Da $\overline{\mathfrak{D}}$ vollständig in zwei Teile vom Grad 2 zerfällt, diese aber höchstens die Stufe 4 haben, erhalten wir $\overline{\mathfrak{G}}^{(5)} \leqq \overline{\mathfrak{D}}^{(4)} = \overline{\mathfrak{E}}$ und dann $\mathfrak{G}^{(7)} = \mathfrak{E}$.

Läßt schließlich $\overline{\mathfrak{G}}$ sich zerlegen in ein Kronecker-Produkt $\overline{\mathfrak{G}} = P_1(\overline{\mathfrak{G}}) \times P_2(\overline{\mathfrak{G}})$ (Fall 2), so ist $\overline{\mathfrak{G}}^{(5)} = \overline{\mathfrak{E}}$ und $\mathfrak{G}^{(7)} = \mathfrak{E}$.

Da Fall 3 für $\overline{\mathfrak{G}}$ nicht eintreten kann, haben wir damit auch für $n = 4$ unsere Behauptung bewiesen.

Für $n = 1$ ist Satz 9 offenbar nicht scharf; aber für $n = 2$ gibt er die genaue Schranke an, wie folgendes Beispiel zeigt:

Die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

mit den Relationen

$$BAB^{-1}=A^{-1},\ CAC^{-1}=B,\ CBC^{-1}=A,\ DAD^{-1}=AB,$$
$$DBD^{-1}=A,\ A^2=B^2=-E,\ C^2=2E,\ D^3=2(1-i)E,$$
$$CDC^{-1}=\frac{1-i}{2}BD^2$$

liefern über jedem Körper K, welcher eine primitive 4-te Einheitswurzel i enthält, eine Gruppe vom Grad 2 und der Stufe 4. Allerdings ist diese Gruppe nur dann von endlicher Ordnung, wenn K nicht die Charakteristik 0 hat.

Für große n läßt sich Satz 9 wesentlich verschärfen.

Satz 10. Sei $\mathfrak{G}$ auflösbar vom Grad $n>1$. Ist $\mathfrak{G}$ vollständig reduzibel, so gilt $k(\mathfrak{G})\leqq 6\,{}_2\log n$, für beliebiges auflösbares $\mathfrak{G}$ $k(\mathfrak{G})\leqq 7\,{}_2\log n+1$.

Beweis. Der Beweis weicht nur stellenweise vom Beweis zu Satz 9 ab. Wir fassen uns daher kurz und geben nur die Änderungen an.

a) Ist $\mathfrak{G}$ vollständig reduzibel in absolut irreduzible Teile der Grade $n_i<n$, so können wir auf die Bestandteile mit $n_i>1$ die Induktionsannahme anwenden und erhalten

$$k(\mathfrak{G})\leqq \mathrm{Max}\{6\,{}_2\log n_i,\ 1\}\leqq 6\,{}_2\log n.$$

Ist $\mathfrak{G}$ nicht vollständig reduzibel, so wenden wir auf die irreduziblen Teile das bisherige Ergebnis an. Dann sehen wir, daß für $k=[6\,{}_2\log n]$ die Gruppe $\mathfrak{G}^{(k)}$ (in geeigneten Koordinaten) aus Matrizen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} E_{n_1} & & \dots & 0 \\ & E_{n_2} & \dots & 0 \\ & & & \vdots \\ & * & & E_{n_j} \end{pmatrix}$$

besteht, also eine Untergruppe der Gruppe aller Dreiecksmatrizen ist. Daher hat $\mathfrak{G}^{(k)}$ höchstens die Stufe $[{}_2\log n]+1$ (GRÜN [6], Satz 8). Wir erhalten somit

$$k(\mathfrak{G})\leqq 7\,{}_2\log n+1.$$

Im folgenden können wir uns auf den Fall beschränken, daß $\mathfrak{G}$ absolut irreduzibel ist.[1]

b) Sei wieder k die Anzahl der Imprimitivitätsgebiete von $\mathfrak{G}$. Ist $k\neq n$, so können wir die Induktionsannahme auf die irreduziblen Bestandteile von $\mathfrak{D}$ anwenden; denn als Normalteiler der irreduziblen Gruppe $\mathfrak{G}$ ist $\mathfrak{D}$ nach Satz 1 vollständig reduzibel. Die Permutationsgruppe $\mathfrak{P}_k\cong\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ fassen wir als lineare Gruppe vom Grad k über dem komplexen Zahlkörper auf; als solche ist sie dann vollständig reduzibel. Also dürfen wir die Induktionsannahme auch auf $\mathfrak{P}_k$ anwenden und erhalten $k(\mathfrak{G})\leqq 6({}_2\log k+{}_2\log n/k)=6\,{}_2\log n$, wie behauptet.

Für $k=n$ müssen wir den früheren Schluß abändern. Wir dürfen annehmen, daß die Permutationsgruppe $\mathfrak{P}_k$ primitiv ist; denn andernfalls könnten wir Imprimitivitätsgebiete von $\mathfrak{G}$ der Dimension >1 auffinden, womit dann $k<n$ wäre und der eben behandelte Fall vorläge.

Als primitive, auflösbare Gruppe hat $\mathfrak{P}_k$ bekanntlich Primzahlpotenzgrad p^m und ist Produkt eines elementar abelschen Normalteilers $\mathfrak{T}$ mit einer Untergruppe $\mathfrak{U}$ der linearen Gruppe $GL(m, p)$. Dabei ist $\mathfrak{U}$ irreduzibel über $GF(p)$, läßt sich also über einem genügend großen separablen Erweiterungskörper von $GF(p)$ vollständig in absolut irreduzible Teile zerlegen (Hilfssatz 3).

Ist $m=1$, so erhalten wir $\mathfrak{U}'=\mathfrak{E}$, daher $\mathfrak{P}_n''=\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G}'''=\mathfrak{E}$. Dann ist unsere Behauptung wegen $3<6\,{}_2\log 2\leqq 6\,{}_2\log n$ bewiesen.

Für $m>1$ können wir auf $\mathfrak{U}$ die Induktionsannahme anwenden und bekommen $k(\mathfrak{U})\leqq 6\,{}_2\log m$ und daraus $k(\mathfrak{G})\leqq 6\,{}_2\log m+2$. Hinreichend für die Richtigkeit unserer Behauptung ist in diesem Falle also die Gültigkeit der Ungleichung

$$(*) \qquad 6\,{}_2\log m+2\leqq 6\,{}_2\log 2^m=6m.$$

Unter d) werden wir für $m\geqq 3$ eine noch schärfere Ungleichung beweisen, aus der (*) folgt.

Für $m=2$ ist nach Satz 9 $\mathfrak{U}^{(4)}=\mathfrak{E}$, daher $\mathfrak{G}^{(6)}=\mathfrak{E}$. Aus $6<6\,{}_2\log 2^2\leqq 6\,{}_2\log n$ folgt nun die Richtigkeit unserer Behauptung für $m=2$.

c) Aus $\mathfrak{G}=P_1(\mathfrak{G})\times P_2(\mathfrak{G})$ mit Grad $P_i(\mathfrak{G})=n_i<n$ folgt für $n_1\geqq n_2$ mit $k=6\,{}_2\log n_1$ nach der Induktionsannahme $\mathfrak{N}_i^{(k)}=\mathfrak{E}$ und dann $\mathfrak{G}^{(k)}=\{aE_n\}$, also $\mathfrak{G}^{(k+1)}=\mathfrak{E}$. Mit

$$k+1\leqq 6\,{}_2\log n_1+1\leqq 6\,{}_2\log n_1+6\,{}_2\log n_2=6\,{}_2\log n$$

ergibt sich nun die Behauptung.

d) Der Fall $\mathfrak{S}'=\mathfrak{E}$ ist wie in Satz 9 trivial. Für $n\neq 2,4$ können wir wegen $n>2m\geqq 2$ die Induktionsannahme auf die über $GF(q)$ irreduzible Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ anwenden. Dies liefert $k(\overline{\mathfrak{G}})\leqq 6\,{}_2\log 2m$ und damit dann $k(\mathfrak{G})\leqq 6\,{}_2\log 2m+2$. Dabei gilt $n=q^m\geqq 2^m$. Unsere Behauptung ist nun gesichert, wenn wir die Ungleichung

$$(**) \qquad 6\,{}_2\log 2m+2=6\,{}_2\log m+8\leqq 6\,{}_2\log 2^m=6m$$

nachweisen. Mit (**) ist sicher auch (*) erfüllt.

(**) ist für $m\geqq 3$ erfüllt; denn die Funktion $f(x)=x-{}_2\log x$ steigt für $x\geqq 3$ monoton und hat für $x=3$ einen Wert $>4/3$.

Nun betrachten wir noch gesondert die Fälle $m=1$ und $m=2$, für welche (**) nicht erfüllt ist. Für $q=2$ erfassen wir dabei die schon zu Beginn von d) ausgeschlossenen Grade $n=2$ und $n=4$ mit.

Für $m=1$ gilt nach Satz 9 $k(\overline{\mathfrak{G}})\leqq 4$, daher $k(\mathfrak{G})\leqq 6$. Die Behauptung ist dann wegen $6=6\,{}_2\log 2\leqq 6\,{}_2\log n$ richtig.

Für $m=2$ haben wir nach Satz 9 die Abschätzung $k(\overline{\mathfrak{G}}) \leqq 8$ und dann $k(\mathfrak{G}) \leqq 10$. Aus $10 < 6\ {}_2\log 2^2 \leqq 6\ {}_2\log n$ ergibt sich nun die Behauptung.

Damit ist Satz 10 vollständig bewiesen.

Die in Satz 10 angegebene Abschätzung von $k(\mathfrak{G})$ ist der Größenordnung nach die bestmögliche. Denn die Gruppe der Dreiecksmatrizen hat nach GRÜN [6] (Satz 8) die Stufe $[{}_2\log n]+1$ für $n \neq 2^m$ bzw. ${}_2\log n$ für $n=2^m$.

Unter spezielleren Annahmen über $\mathfrak{G}$ können wir Satz 9 noch verschärfen.

Satz 11. $\mathfrak{G}$ sei eine auflösbare Gruppe vom Grad n über dem Körper K. Ist $D(\mathfrak{G})$ eine beliebige Darstellung von $\mathfrak{G}$ über dem komplexen Zahlkörper C oder der algebraisch abgeschlossenen Hülle von K, so lasse $D(\mathfrak{G})$ sich auf monomiale Gestalt bringen. Dann gilt $\mathfrak{G}^{(n)} = \mathfrak{E}$.

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach dem Grad n. Nach unserer Voraussetzung ist $\mathfrak{G}$ monomial. Sei $\mathfrak{D}$ der aus den Diagonalmatrizen von $\mathfrak{G}$ bestehende Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ isomorph zu einer Permutationsgruppe $\mathfrak{P}_n$ vom Grad n, die wir als lineare Gruppe vom Grad n über C auffassen wollen. $\mathfrak{P}_n$ enthält mindestens einmal die identische Darstellung und ist vollständig reduzibel, läßt sich daher auf die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{L}_{n-1} \end{pmatrix}$$

bringen. Die Gruppe $\mathfrak{L}_{n-1}$ ist isomorph zu $\mathfrak{P}_n$, also homomorphes Bild von $\mathfrak{G}$ und erfüllt daher unsere Voraussetzungen. Nach der Induktionsannahme ist dann $\mathfrak{P}_n^{(n-1)} = \mathfrak{E}$, also $\mathfrak{G}^{(n-1)} \leqq \mathfrak{D}$ und dann $\mathfrak{G}^{(n)} = \mathfrak{E}$, wie behauptet.

Die Voraussetzung in Satz 11, daß auch alle Darstellungen von $\mathfrak{G}$ über C, und nicht nur über K, auf monomiale Gestalt gebracht werden können, läßt sich umgehen, etwa unter Verwendung des folgenden Hilfssatzes von H. WIELANDT (mündliche Mitteilung): Besitzt die Permutationsgruppe $\mathfrak{P}$ über K den identischen Bestandteil genau einmal und nur einen absolut irreduziblen weiteren Bestandteil vom Grad >1, so ist sie vollständig reduzibel. (Ist $K=C$, so ist $\mathfrak{P}$ bekanntlich stets vollständig reduzibel, unabhängig von den Graden der Bestandteile.)

Die Voraussetzungen von Satz 11 treffen z.B. dann zu, wenn $\mathfrak{G}$ lauter abelsche Sylow-Gruppen hat und die Ordnung von $\mathfrak{G}$ zu Char. K teilerfremd ist (N. ITÔ [11]).

§ 5. Abschätzung des Ranges

Eine Abschätzung des Ranges $r(\mathfrak{G})$ einer beliebigen linearen, auflösbaren Gruppe $\mathfrak{G}$ durch den Grad n allein ist bei beliebigem Körper K nicht möglich; denn die Gruppe $\mathfrak{G}$ der Dreiecksmatrizen

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c \in GF(p^l)$ und $ab \neq 0$ besitzt die Gruppe der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

als minimalen Normalteiler. Da dieser Normalteiler f erzeugende Elemente hat, ist $r(\mathfrak{G}) = f$. Dieses f kann aber völlig unabhängig vom Grad $n = 2$ gewählt werden, so daß eine Ungleichung der Gestalt $r(\mathfrak{G}) \leqq h(n)$ für keine Funktion $h(n)$ bestehen kann.

Wir wollen nun zeigen, daß wenigstens bei vollständig reduziblen Gruppen gegebenen Grades eine Schranke für den Rang existiert. Zwei Hilfssätze schicken wir voraus:

Hilfssatz 4. Sei $\mathfrak{G}$ eine imprimitive Gruppe des Grades n mit k Imprimitivitätsgebieten $\mathfrak{r}_i$ der Dimension m. Sei $\mathfrak{D}$ derjenige Normalteiler von $\mathfrak{G}$, welcher jedes Imprimitivitätsgebiet $\mathfrak{r}_i$ fest läßt. Ist dann

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_k \end{pmatrix}$$

eine Matrix aus $\mathfrak{D}$, so nehmen wir zu $\mathfrak{G}$ alle die Matrizen

$$D_{(i)} = \begin{pmatrix} E & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots D_i \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & E \end{pmatrix}$$

hinzu, und zwar machen wir dies für jedes $D \in \mathfrak{D}$. Es entsteht dann eine Gruppe $\mathfrak{G}^* \geqq \mathfrak{G}$, welche die von den $D_{(i)}$ gebildete Untergruppe $\mathfrak{D}^*$ als Normalteiler besitzt. Dabei ist $\mathfrak{G}^*/\mathfrak{D}^* \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{D}$, und diese beiden Faktorgruppen haben gemeinsame Vertreter.

Beweis. Ist

$$GDG^{-1} = D' = \begin{pmatrix} D_1' & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2' & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_k' \end{pmatrix}$$

und $G\mathfrak{r}_i = \mathfrak{r}_{i'}$, so ist $GD_{(i)}G^{-1} = D'_{(i')} \in \mathfrak{D}^*$. Daher bilden die $D_{(i)}$ einen Normalteiler $\mathfrak{D}^*$ der erweiterten Gruppe $\mathfrak{G}^*$. Der Rest der Behauptung ist trivial.

Hilfssatz 5. Wir betrachten die in Hilfssatz 4 konstruierte imprimitive Obergruppe $\mathfrak{G}^*$ von $\mathfrak{G}$. Sei $\mathfrak{G}_1^*$ diejenige Untergruppe von $\mathfrak{G}^*$, welche das erste Imprimitivitätsgebiet $\mathfrak{r}_1$ in sich überführt; $\mathfrak{G}_1^*$ bewirke auf $\mathfrak{r}_1$ die Darstellung $B(\mathfrak{G}_1^*)$. Ist dann $r\left(B(\mathfrak{G}_1^*)\right) \leqq c$, so folgt $r_{\mathfrak{G}^*}(\mathfrak{D}^*) \leqq ck$.

Beweis. $\mathfrak{D}^*$ enthält nach unserer Konstruktion einen Normalteiler $\mathfrak{D}_i^*$ der Gestalt

$$\mathfrak{D}_i^* = \begin{pmatrix} E & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & D_i(\mathfrak{D}_i^*) & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & E \end{pmatrix}.$$

Offenbar ist $\mathfrak{D}^* = \mathfrak{D}_1^* \times \cdots \times \mathfrak{D}_k^*$. Da sich beim Übergang von $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{G}^*$ die ersten Komponenten D_1 nicht geändert haben, ist wegen $\mathfrak{D} \lhd \mathfrak{G}_1$ auch $\mathfrak{D}_1^* \lhd \mathfrak{G}_1^*$.

Sei nun $\mathfrak{E} = \mathfrak{K}_0 \lhd \mathfrak{K}_1 \lhd \cdots \lhd \mathfrak{K}_s = D_1(\mathfrak{D}_1^*)$ das Stück einer Hauptreihe von $B(\mathfrak{G}_1^*)$ unterhalb $D_1(\mathfrak{D}_1^*)$. Aus unserer Voraussetzung $r(B(\mathfrak{G}_1^*)) \leq c$ folgt $|\mathfrak{K}_{j+1}/\mathfrak{K}_j| = p_j^{a_j}$ mit $a_j \leq c$. Da $\mathfrak{D}_1^*$ durch $D_1(\mathfrak{D}_1^*)$ treu dargestellt wird, entsprechen den $\mathfrak{K}_j$ isomorphe Normalteiler $\mathfrak{M}_j$ von $\mathfrak{G}_1^*$ mit $|\mathfrak{M}_{j+1}/\mathfrak{M}_j| = p_j^{a_j}$.

Die Elemente $G_1, G_2, \dots, G_k$ seien Vertreter von $\mathfrak{G}_1^*$ in $\mathfrak{G}^*$ mit $G_i \mathfrak{r}_i = \mathfrak{r}_1$. Da $\mathfrak{D}_1^*$ nur auf $\mathfrak{r}_1$ von der Identität verschiedene Abbildungen bewirkt, liefert $\mathfrak{D}_1^{*G_i}$ auf allen $\mathfrak{r}_j$ mit $j \neq i$ die identische Abbildung. Somit ist

$$\mathfrak{D}_1^{*G_i} \cap \mathfrak{D}_1^{*G_j} = \mathfrak{E}$$

für $i \neq j$. Nun bilden wir die direkten Produkte

$$\mathfrak{L}_j = \mathfrak{M}_j^{G_1} \times \mathfrak{M}_j^{G_2} \times \cdots \times \mathfrak{M}_j^{G_k}.$$

Die $\mathfrak{L}_j$ sind Normalteiler von $\mathfrak{G}^*$: Sei nämlich G ein beliebiges Element von $\mathfrak{G}^*$. Zu jedem s gibt es $\overline{G_1} \in \mathfrak{G}_1^*$ und t mit $G_s G = \overline{G_1} G_t$. Nun erhalten wir unter Beachtung von

$$\mathfrak{M}_j^{\overline{G_1}} = \mathfrak{M}_j$$

die Aussage

$$\mathfrak{M}_j^{G_s G} = \mathfrak{M}_j^{\overline{G_1} G_t} = \mathfrak{M}_j^{G_t}.$$

Bei Transformation mit G werden also die Faktoren von $\mathfrak{L}_j$ vertauscht und $\mathfrak{L}_j$ selbst bleibt invariant. Aus $|\mathfrak{L}_{j+1}/\mathfrak{L}_j| = |\mathfrak{M}_{j+1}/\mathfrak{M}_j|^k = p_j^{a_j k}$ mit $a_j k \leq ck$ ergibt sich nun wegen $\mathfrak{L}_s = \mathfrak{D}_1^* \times \cdots \times \mathfrak{D}_k^* = \mathfrak{D}^*$ die Behauptung $r_{\mathfrak{G}^*}(\mathfrak{D}^*) \leq ck$.

Wir kommen nun zu der angekündigten Abschätzung von $r(\mathfrak{G})$.

Satz 12. Sei $\mathfrak{G}$ eine endliche, auflösbare Gruppe vom Grad n, welche über dem algebraisch abgeschlossenen Körper K vollständig reduzibel ist. Dann ist $r(\mathfrak{G}) \leq n$.

Beweis. Wieder führen wir nach dem Vorbild von § 2 einen Induktionsbeweis nach n.

a) Zunächst sei $\mathfrak{G}$ reduzibel. Nach unserer Voraussetzung ist dann $\mathfrak{G}$ vollständig reduzibel, also bei passender Wahl des Koordinatensystems

$$\mathfrak{G} = \begin{pmatrix} A_1(\mathfrak{G}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2(\mathfrak{G}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_j(\mathfrak{G}) \end{pmatrix}$$

mit absolut irreduziblen Darstellungen $A_i(\mathfrak{G})$ der Grade n_i. Auf die $A_i(\mathfrak{G})$ können wir nun unsere Induktionsannahme anwenden und erhalten $r(A_i(\mathfrak{G})) \leq n_i < n$. Da aber $\mathfrak{G}$ zu einer Untergruppe des direkten Produktes der durch die $A_i(\mathfrak{G})$ dargestellten abstrakten Gruppen isomorph ist, gilt dann auch $r(\mathfrak{G}) \leq n$.

Weiterhin sei $\mathfrak{G}$ absolut irreduzibel.

b) Nun sei $\mathfrak{G}$ imprimitiv mit k Imprimitivitätsgebieten $\mathfrak{r}_i$ der Dimension m. Wir betrachten statt $\mathfrak{G}$ die in Hilfssatz 4 konstruierte Obergruppe $\mathfrak{G}^*$. Wenn wir $r(\mathfrak{G}^*) \leq n$ nachweisen können, so ist auch $r(\mathfrak{G}) \leq n$ gesichert.

Da wir nach a) $\mathfrak{G}^*$ als absolut irreduzibel annehmen können, ist auch $B(\mathfrak{G}_1^*)$ absolut irreduzibel (Satz 2). Auf die Gruppe $B(\mathfrak{G}_1^*)$ vom Grad m können wir nun die Induktionsannahme anwenden. Dies liefert uns $r(B(\mathfrak{G}_1^*)) \leq m$ Damit ist aber die Voraussetzung von Hilfssatz 5 mit m statt c erfüllt, und wir erhalten $r_{\mathfrak{G}^*}(\mathfrak{D}^*) \leq km = n$.

Nun bleibt noch zu zeigen, daß die zu $\mathfrak{G}^*/\mathfrak{D}^*$ isomorphe Permutationsgruppe $\mathfrak{P}_k$ höchstens den Rang n hat. Dazu betrachten wir $\mathfrak{P}_k$ über dem komplexen Zahlkörper. $\mathfrak{P}_k$ enthält die identische Darstellung und ist vollständig reduzibel in absolut irreduzible Teile, die höchstens den Grad $n-1$ haben. Nun liefert die Anwendung der Induktionsannahme auf die Bestandteile von $\mathfrak{P}_k$, daß sogar $r(\mathfrak{P}_k) = r(\mathfrak{G}^*/\mathfrak{D}^*) \leq n-1$ gilt. Damit haben wir in diesem Fall $r(\mathfrak{G}^*) \leq n$ bewiesen.

c) Jetzt lasse sich $\mathfrak{G}$ zerlegen in ein Kronecker-Produkt $\mathfrak{G} = P_1(\mathfrak{G}) \times P_2(\mathfrak{G})$ mit Grad $P_i(\mathfrak{G}) = n_i$. Auf die zu den $P_i(\mathfrak{G})$ gehörigen Gruppen $\mathfrak{R}_i$ können wir unsere Induktionsannahme anwenden; denn wegen der absoluten Irreduzibilität von $\mathfrak{G}$ sind auch die $\mathfrak{R}_i$ absolut irreduzibel. Somit bekommen wir $r(\mathfrak{R}_i) \leq n_i < n$. Nun ist aber $\mathfrak{G}$ ein homomorphes Bild einer Untergruppe des direkten Produktes der $\mathfrak{R}_i$, hat daher ebenfalls höchstens den Rang n.

d) Es ist noch der Fall 3 zu betrachten, daß alle reduziblen Normalteiler von $\mathfrak{G}$ in lauter äquivalente Bestandteile vom Grad 1 zerfallen. Nach Hilfssatz III.2 haben wir dann $|\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = n^2 = q^{2m}$. Die Gruppe $\mathfrak{C}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ ist nach dem Schurschen Lemma zyklisch, die Faktorgruppe $\mathfrak{C}(\mathfrak{H})/\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ ist nach Hilfssatz II.2 eine abelsche Gruppe mit höchstens $2m$ Erzeugenden. Wegen $2m \leq n = q^m$ haben wir damit $r_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C}(\mathfrak{H})) \leq n$ bewiesen. Es fehlt noch der Nachweis, daß auch $r(\mathfrak{G}/\mathfrak{C}(\mathfrak{H})) = r(\overline{\mathfrak{G}}) \leq n$ ist. $\overline{\mathfrak{G}}$ ist eine über $GF(q)$ irreduzible Untergruppe von $GL(2m, q)$. Nach Hilfssatz 3 zerfällt $\overline{\mathfrak{G}}$ über einem geeigneten Erweiterungskörper von $GF(q)$ vollständig in absolut irreduzible Teile. Also können wir auf $\overline{\mathfrak{G}}$ unsere Induktionsannahme anwenden, sofern $2m < n$ ist. Wir bekommen so $r(\overline{\mathfrak{G}}) \leq 2m < n$ und dann auch $r(\mathfrak{G}) \leq n$.

Nun fehlen uns noch die Sonderfälle $n = 2$ und $n = 4$, in denen die Ungleichung $2m < n$ nicht erfüllt ist.

Für $n = 2$ ist $q = 2$ und daher $\overline{\mathfrak{G}} \leq GL(2, 2)$. Dann ist aber $\overline{\mathfrak{G}}$ sogar überauflösbar und $r(\overline{\mathfrak{G}}) = 1$.

Für $n=4$ kann der Fall 3 von § 2 nicht eintreten, da über $GF(2)$ die Einheitsmatrix E selbst das einzige Vielfache von E ist. Daher liegt für $\overline{\mathfrak{G}}$ einer der schon erledigten Fälle a), b) oder c) vor. Dies zeigt uns $r(\overline{\mathfrak{G}}) \leq 4$ und dann wie oben auch $r(\mathfrak{G}) \leq 4$.

Damit ist der Beweis von Satz 12 beendet.

Der Beweisgang von Satz 12 legt die Vermutung nahe, daß bei geeigneten imprimitiven Gruppen $r(\mathfrak{G})$ wirklich nahe bei n liegt, die angegebene Schranke sich also nicht wesentlich verbessern läßt.

§ 6. Die Ordnung irreduzibler Gruppen

Wir betrachten Gruppen über einem Galois-Feld $GF(p^f)$. Uns interessiert die maximale Potenz der Charakteristik p, welche in der Ordnung einer auflösbaren Gruppe $\mathfrak{G}$ vom Grad n über $GF(p^f)$ aufgehen kann. Die höchste p-Potenz, welche in der Ordnung der vollen linearen Gruppe $GL(n, p^f)$ aufgeht, ist bekanntlich

$$p^{f\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Diese Potenz kann auch in der Ordnung einer auflösbaren Untergruppe von $GL(n, p^f)$ aufgehen; dazu brauchen wir nur eine p-Sylow-Gruppe von $GL(n, p^f)$ zu nehmen. Setzen wir aber voraus, daß $\mathfrak{G}$ über $GF(p^f)$ vollständig reduzibel ist, so kann die Ordnung von $\mathfrak{G}$ nur wesentlich kleinere Potenzen von p enthalten:

Satz 13. $\mathfrak{G}$ sei auflösbar vom Grad n und vollständig reduzibel über $GF(p^f)$. Ist p^g die höchste p-Potenz, welche die Ordnung von $\mathfrak{G}$ teilt, so gilt für $p>2$ die Abschätzung

$$g \leq f\left(\frac{3n}{p}-1\right);$$

ist die rechte Seite dieser Ungleichung negativ, so ist die Aussage durch $g=0$ zu ersetzen.

Satz 13 liefert eine wesentlich bessere Abschätzung als

$$g \leq f\frac{n(n-1)}{2}.$$

Besonders interessant ist, daß die Schranke mit wachsender Primzahl p besser wird.

Beweis. Wir verwenden wieder das Induktionsverfahren von § 2; jedoch sind erhebliche Verfeinerungen nötig, da sich unsere Aussage jetzt auf einen festen Körper bezieht und wir daher nicht sofort zur algebraisch abgeschlossenen Hülle übergehen können.

a) Zuerst zerfalle $\mathfrak{G}$ über $GF(p^f)$ vollständig in k irreduzible Teile $A_i(\mathfrak{G})$ der Grade n_i. Wenn der Strich bedeutet, daß wir nur über die i mit $3n_i-p>0$

summieren, so ist nach unserer Induktionsannahme

$$g \leqq \sum_{i=1}^{k}{}' f\left(\tfrac{3}{p} n_i - 1\right) \leqq f\left(\tfrac{3}{p} \sum_{i=1}^{k} n_i - 1\right) \leqq f\left(\tfrac{3n}{p} - 1\right)$$

oder $g = 0$.

Wir können uns daher weiterhin auf die Betrachtung solcher Gruppen $\mathfrak{G}$ beschränken, die über $GF(p^f)$ irreduzibel sind.

b) Nun besitze $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler, der über $GF(p^f)$ zerfällt, und zwar in nicht lauter äquivalente irreduzible Bestandteile. Dann ist $\mathfrak{G}$ über $GF(p^f)$ imprimitiv (Satz 2) und enthält einen Normalteiler

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} D_1(\mathfrak{D}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2(\mathfrak{D}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_k(\mathfrak{D}) \end{pmatrix}$$

derart, daß $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ zu einer Untergruppe $\mathfrak{P}_k$ der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_k$ isomorph ist. Da die Teilmoduln $\mathfrak{r}_i$ unter $\mathfrak{G}$ transitiv permutiert werden, haben alle $D_i(\mathfrak{D})$ die gleiche Ordnung. Nach unserer Induktionsannahme gilt nun

$$\text{für } p^c \top |D_i(\mathfrak{D})| \quad \text{die Abschätzung} \quad c \leqq f\left(\tfrac{3}{p} \tfrac{n}{k} - 1\right)$$

oder $c = 0$,

$$\text{für } p^d \top |\mathfrak{D}| \quad \text{dann} \quad d \leqq k c \leqq f\left(\tfrac{3}{p} n - k\right)$$

oder $d = 0$.

Ist schließlich $p^e \top |\mathfrak{G}/\mathfrak{D}|$, so gilt $p^e | k!$. Dann ist bekanntlich

$$e \leqq \left[\tfrac{k}{p}\right] + \left[\tfrac{k}{p^2}\right] + \dots < \tfrac{k}{p} + \tfrac{k}{p^2} + \dots = \tfrac{k}{p-1}.$$

Insgesamt erhalten wir nun für $d > 0$ die Abschätzung

$$g \leqq f\left(\tfrac{3}{p} n - k\right) + \tfrac{k}{p-1} \leqq f\left(\tfrac{3}{p} n - k + \tfrac{k}{p-1}\right).$$

Ist $k\left(1 - \tfrac{1}{p-1}\right) \geqq 1$, so sind wir fertig. Dies ist aber wegen $p > 2$ und $k \geqq 2$ sicher der Fall.

Ist aber $d = 0$, so gilt $g = e < \tfrac{k}{p-1} \leqq \tfrac{n}{p-1}$. Wegen $\tfrac{p}{2} < p - 1$ gilt daher für $n \geqq p$ die gewünschte Ungleichung

$$g < \tfrac{n}{p-1} < \tfrac{2n}{p} \leqq \tfrac{3n}{p} - 1.$$

Für $n < p$ ist $p \nmid k!$ und daher $g = e = 0$.

Wir können weiterhin annehmen, daß jeder über $GF(p^l)$ reduzible Normalteiler von $\mathfrak{G}$ in lauter äquivalente irreduzible Bestandteile zerfällt.

c) Nun nehmen wir an, daß es einen abelschen Normalteiler $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ gibt, der nicht nur aus Matrizen der Gestalt aE besteht. Da $\mathfrak{A}$ nach b) über $GF(p^l)$ in lauter äquivalente irreduzible Teile zerfällt, ist

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} D(\mathfrak{A}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D(\mathfrak{A}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D(\mathfrak{A}) \end{pmatrix}$$

mit einer über $GF(p^l)$ irreduziblen Darstellung $D(\mathfrak{A})$ vom Grad k; dabei ist $1 < k \leq n$. Wir setzen $n = jk$, so daß $\mathfrak{A}$ in j Teile zerfällt. Da $D(\mathfrak{A})$ abelsch und über $GF(p^l)$ irreduzibel ist, ist es nach Hilfssatz 2 zyklisch. Folglich läßt sich $D(\mathfrak{A})$ in $GF(p^{lk})$ auf Diagonalgestalt bringen, und dann $\mathfrak{A}$ ebenso. Ist A ein erzeugendes Element von $\mathfrak{A}$, so gilt also in geeigneten Koordinaten

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_k \end{pmatrix}$$

mit $a_i \in GF(p^{lk})$. Nochmalige Koordinatenänderung führt zu

$$\begin{pmatrix} a_1 E_j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 E_j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_k E_j \end{pmatrix},$$

wobei E_j die j-reihige Einheitsmatrix ist. Die a_i sind als Eigenwerte der über $GF(p^l)$ irreduziblen Matrix $D(A)$ alle verschieden (Hilfssatz 2). Daher ist $\mathfrak{G}$ über $GF(p^{lk})$ imprimitiv und hat einen Normalteiler

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} D_1(\mathfrak{D}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2(\mathfrak{D}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_k(\mathfrak{D}) \end{pmatrix}$$

mit $\mathfrak{G}/\mathfrak{D} \simeq \mathfrak{P}_k \leq \mathfrak{S}_k$.

$D_1(\mathfrak{D})$ stellt $\mathfrak{D}$ treu dar: Denn ist $\mathfrak{N}$ der Kern des Homomorphismus von $\mathfrak{D}$ auf $D_1(\mathfrak{D})$, so enthält $\mathfrak{N}$ die identische Darstellung. $\mathfrak{D}$ zerfällt über $GF(p^l)$ höchstens in lauter äquivalente Teile $C(\mathfrak{D})$. Dann enthält $C(\mathfrak{N})$ ebenfalls die identische Darstellung, und nur diese, da wegen der Irreduzibilität von $C(\mathfrak{D})$

über $GF(p^f)$ alle Bestandteile von $C(\mathfrak{N})$ konjugiert sind[5]) (Clifford [3]). Nun folgt $C(\mathfrak{N}) = \mathfrak{E}$ und dann $\mathfrak{N} = \mathfrak{E}$, was zu zeigen war.

Bei der separablen Erweiterung von $GF(p^f)$ zu $GF(p^{fk})$ bleibt $\mathfrak{D}$ vollständig reduzibel (v. d. Waerden [18], S. 165). Unsere Induktionsannahme liefert uns daher wegen $|D_1(\mathfrak{D})| = |\mathfrak{D}|$ für $p^d \top |\mathfrak{D}|$ die Abschätzung

$$d \leq fk\left(\frac{3}{p}\operatorname{Grad} D_1(\mathfrak{D}) - 1\right) = fk\left(\frac{3}{p}\frac{n}{k} - 1\right) = f\left(\frac{3n}{p} - k\right)$$

oder $d = 0$.

Ist $p^e \top |\mathfrak{G}/\mathfrak{D}|$, so gilt wieder $p^e | k!$ und dann $e < \frac{k}{p-1}$. Für $d > 0$ erhalten wir nun

$$g \leq f\left(\frac{3n}{p} - k + \frac{k}{p-1}\right).$$

Wegen $k \geqq 2$ können wir nun wie unter b) weiterschließen. Für $d = 0$ bleibt der Schluß von b) unverändert richtig.

d) Es ist noch der Fall zu behandeln, daß alle abelschen Normalteiler von $\mathfrak{G}$ nur aus Vielfachen der Einheitsmatrix E bestehen. Dann betrachten wir wie in § 2 einen minimalen nichtabelschen Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$. Nun liegen die Voraussetzungen der Hilfssätze I bis III vor, wobei $\mathfrak{A} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ nur aus Vielfachen der Einheitsmatrix E besteht. Nach Hilfssatz I.3 ist dann $\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})) = \mathfrak{G}$. Wegen Hilfssatz I.6 gilt $q | p^f - 1$. Gemäß Hilfssatz III.1 lassen sich daher die absolut irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{N}$ für $q \neq 2$ schon in $GF(p^f)$ angeben; für $q = 2$ ist dies auch noch richtig, sofern $p^f \equiv 1(4)$ gilt.

Wir behandeln zunächst den Fall, daß $\mathfrak{N}$ über $GF(p^f)$ in $k > 1$ äquivalente, absolut irreduzible Teile zerfällt. Für $q \neq 2$ und $q = 2$ mit $4 | p^f - 1$ ist dies nach der eben gemachten Feststellung sicher der Fall, falls nicht $\mathfrak{N}$ überhaupt absolut irreduzibel ist. Nun läßt sich $\mathfrak{G}$ nach Satz 3 zerlegen in ein Kronecker-Produkt $\mathfrak{G} = P_1(\mathfrak{G}) \times P_2(\mathfrak{G})$ mit Grad $P_1(\mathfrak{G}) = k$. Die $P_i(\mathfrak{G})$ entstehen aus Gruppen $\mathfrak{K}_i$ des gleichen Grades. Wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{G}$ sind auch die $\mathfrak{K}_i$ irreduzibel über $GF(p^f)$. $\mathfrak{G}$ ist ein homomorphes Bild einer Untergruppe des direkten Produktes der $\mathfrak{K}_i$. Unsere Induktionsannahme liefert uns daher mit $p^{g_i} \top |\mathfrak{K}_i|$

$$\begin{aligned}
&g = 0 && \text{für } g_1 = g_2 = 0,\\
&g \leq f\left(\frac{3k}{p} - 1\right) && \text{für } g_1 \neq 0,\ g_2 = 0,\\
&g \leq f\left(\frac{3}{p}\frac{n}{k} - 1\right) && \text{für } g_1 = 0,\ g_2 \neq 0,\\
&g \leq f\left(\frac{3k}{p} - 1\right) + f\left(\frac{3}{p}\frac{n}{k} - 1\right)\\
&\quad = f\left(\frac{3}{p}\left(k + \frac{n}{k}\right) - 2\right) && \text{für } g_i \neq 0\ (i = 1, 2).
\end{aligned}$$

In den ersten drei Fällen ist offenbar unsere Behauptung erfüllt; im vierten Fall haben wir noch $1 < k < n$ und $k | n$ zu beachten, womit dann wegen $k + \frac{n}{k} \leq n$ ebenfalls die Behauptung folgt.

[5]) d.h. sie haben die Gestalt $C(GNG^{-1})$ mit geeignetem $G \in \mathfrak{D}$.

Jetzt betrachten wir den Fall, daß $\mathfrak{N}$ über $GF(p^f)$ in k gleiche Teile zerfällt ($k>1$), diese aber nicht absolut irreduzibel sind. Dies kann nur für $q=2$ und $4 \nmid p^f-1$ eintreten. Da $GF(p^{2f})$ primitive 4-te Einheitswurzeln enthält, läßt sich nach Hilfssatz III.1 jede absolut irreduzible Darstellung von $\mathfrak{N}$ jedenfalls in $GF(p^{2f})$ angeben. $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ ist ein abelscher Normalteiler von $\mathfrak{G}$, besteht also nur aus Vielfachen der Einheitsmatrix E. Wegen $4 \nmid p^f-1$ ist daher $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})|=2$. Nach Hilfssatz III.4 besitzt $\mathfrak{N}$ über $GF(p^{2f})$ genau eine absolut irreduzible treue Darstellung.

Nun möge jeder der k über $GF(p^f)$ irreduziblen Teile von $\mathfrak{N}$ beim Übergang zu $GF(p^{2f})$ in i absolut irreduzible Teile zerfallen. Diese Teile sind nach dem eben Gezeigten alle gleich. $\mathfrak{N}$ zerfällt dann also über $GF(p^{2f})$ in ik absolut irreduzible gleiche Teile. Wieder können wir $\mathfrak{G}$ in ein Kronecker-Produkt zerlegen. Den trivialen Fall, daß nicht in den Ordnungen beider Gruppen $\mathfrak{K}_i$ die Primzahl p aufgeht, lassen wir beiseite. Unsere Induktionsannahme liefert uns nun

$$g \leq 2f\left(\frac{3}{p} ik + \frac{3}{p}\frac{n}{ik} - 2\right).$$

Ist $n \geqq 2^2 ik$, so haben wir wegen $k \geqq 2$ und $i \geqq 2$ die Ungleichungen $4 \leqq ik \leqq \frac{n}{4}$ und daher

$$g \leq 2f\left(\frac{3}{p}\frac{n}{4} + \frac{3}{p}\frac{n}{4} - 2\right) = f\left(\frac{3n}{p} - 4\right) < f\left(\frac{3n}{p} - 1\right),$$

was zu zeigen war.

Übrig bleibt jetzt noch der Fall, daß der Grad n/ik des einzigen vorkommenden absolut irreduziblen Bestandteiles von $\mathfrak{N}$ kleiner als 2^2 ist. Da dieser Grad eine Potenz von 2 ist (Hilfssatz III.3), muß dann $n/ik=2$ sein. Nun haben wir $|\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = 2^2$ (Hilfssatz III.3), also wegen $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})| = 2$ dann $|\mathfrak{N}| = 2^3$. $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ ist ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$; dann kann aber $\mathfrak{N}$ keine Dieder-Gruppe sein, ist daher eine Quaternionengruppe $\mathfrak{Q}$; denn die Dieder-Gruppe der Ordnung 8 besitzt eine charakteristische Untergruppe vom Index 2. Die einzige absolut irreduzible, treue Darstellung von $\mathfrak{Q}$ über einem Körper K mit Char. $K \neq 2$ wird geliefert durch die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} i & j \\ j & -i \end{pmatrix}$$

mit $i^2+j^2=-1$. Da solche i, j in jedem Primkörper $GF(p)$ mit $p \neq 2$ gefunden werden können (SCHOLZ-SCHOENEBERG [13], S. 67), lassen sich alle absolut irreduziblen, treuen Darstellungen von $\mathfrak{Q}$ bereits in $GF(p^f)$ angeben. Damit liegt der zu Beginn von d) schon erledigte Fall vor.

Im folgenden dürfen wir also annehmen, daß der Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ über $GF(p^f)$ irreduzibel ist.

e) Nun können wir uns auf die Betrachtung der mit $\mathfrak{N}$ ebenfalls über $GF(p^f)$ irreduziblen Gruppe $\mathfrak{N}\mathfrak{G}_p$ beschränken. Wir dürfen annehmen, daß auch $\mathfrak{N}\mathfrak{G}_p$ keinen abelschen Normalteiler besitzt, der nicht nur aus Vielfachen der Einheitsmatrix E besteht; andernfalls ließen sich nämlich die früheren Betrachtungen auf $\mathfrak{N}\mathfrak{G}_p$ anwenden.

Sei $\mathfrak{K}$ ein minimaler nichtabelscher Normalteiler von $\mathfrak{N}\mathfrak{G}_p$. Wir können annehmen, daß $\mathfrak{K}$ über $GF(p^f)$ irreduzibel ist, da sonst einer der schon behandelten Fälle vorläge. Daher dürfen wir in der weiteren Betrachtung $\mathfrak{N}\mathfrak{G}_p$ durch $\mathfrak{K}\mathfrak{G}_p$ ersetzen. Führen wir diesen Schritt mehrfach durch, so können wir schließlich annehmen, daß $\mathfrak{N}$ minimaler nichtabelscher Normalteiler von $\mathfrak{N}\mathfrak{G}_p$ ist.

Ist $q>2$ oder $q=2$ und $4\mid p^f-1$, so ist nach Hilfssatz III.3 $\mathfrak{N}$ absolut irreduzibel und $|\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})|=n^2=q^{2m}$, also $n=q^m$. Ist aber $q=2$ und $4\nmid p^f-1$, also $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})|=2$, so können wir auf den eindeutig bestimmten absolut irreduziblen Bestandteil von $\mathfrak{N}$ Hilfssatz III.4 anwenden und erhalten, wenn $\mathfrak{N}$ in t absolut irreduzible Teile zerfällt, $n=t\,2^m$ mit $|\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})|=2^{2m}$.

Wir betrachten die Automorphismen, welche eine p-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{G}$ bei Transformation auf $\mathfrak{H}=\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ bewirkt. Dabei erfährt $\mathfrak{G}_p$ eine Darstellung $H(\mathfrak{G}_p)$ vom Grad $2m$ über $GF(q)$. $H(\mathfrak{G}_p)$ ist irreduzibel über $GF(q)$; denn nach Hilfssatz I.2 ist $\mathfrak{H}$ Hauptfaktor von $\mathfrak{G}=\mathfrak{N}\mathfrak{G}_p$. Wegen $\mathfrak{C}(\mathfrak{N})=\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ [Hilfssatz II.1 mit $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ statt $\mathfrak{N}$] und der Kommutativität von $\mathfrak{C}(\mathfrak{H})/\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ [Hilfssatz II.2 mit $\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}))=\mathfrak{G}$] ist $\mathfrak{C}(\mathfrak{H})$ nilpotent, kann daher wegen Hilfssatz 1 keine nichttriviale p-Sylow-Gruppe besitzen. Folglich gilt $\mathfrak{C}(\mathfrak{H})\cap\mathfrak{G}_p=\mathfrak{E}$, und $H(\mathfrak{G}_p)$ ist treu.

Zunächst behandeln wir den Fall, daß die p-Sylow-Gruppe $\mathfrak{G}_p$ abelsch ist. Da $\mathfrak{G}_p$ durch $H(\mathfrak{G}_p)$ treu und irreduzibel dargestellt wird, ist $\mathfrak{G}_p$ nach Hilfssatz 2 zyklisch. Sei P ein erzeugendes Element von $\mathfrak{G}_p$. Bekanntlich läßt sich P über $GF(p^f)$ auf Dreiecksgestalt bringen (Speiser [15], S. 222). Daher ist für $p^a\geq n$

$$P^{p^a}=E.$$

Wegen $|\mathfrak{G}_p|=p^g$ gilt also $p^{g-1}<n$.

Sei zunächst $n<p$. Da $H(\mathfrak{G}_p)$ über $GF(q)$ irreduzibel ist, kann es in $GF(q^{2m})$ auf Diagonalgestalt gebracht werden. Daher haben wir

$$p^g\mid q^{2m}-1=(q^m-1)(q^m+1).$$

Wegen $p>n\geq q^m$ folgt $p^g\mid q^m+1$. Abgesehen von dem Fall $g=0$ ist dies nur für $g=1$ und $p=n+1=q^m+1$ erfüllt. Dann folgt aber die Richtigkeit unserer Behauptung unter Beachtung von $p\geq 3$ aus

$$\frac{3n}{p}-1=\frac{3(p-1)}{p}-1=\frac{2p-3}{p}\geq 1\geq g.$$

Nun sei $n\geq p$. Angenommen, es sei entgegen unserer Behauptung $g>f\left(\frac{3n}{p}-1\right)\geq\frac{3n}{p}-1$. Dann bekommen wir wegen $\frac{3n}{p}-2\geq 1$ mit Hilfe der Ungleichung von Bernoulli

$$n>p^{g-1}>p^{3n/p-2}=\left(1+(p-1)\right)^{3n/p-2}\geq 1+(p-1)\left(\frac{3n}{p}-2\right)$$

und dann

$$\frac{n(3-2p)}{p}>3-2p,$$

wegen $3-2p<0$ also $n<p$, entgegen unserer Annahme $n \geqq p$. Damit ist für abelsches $\mathfrak{G}_p$ unser Satz bewiesen.

f) Es bleibt noch der Fall $\mathfrak{G}_p' \neq \mathfrak{E}$ zu behandeln. Wir betrachten die absolut irreduziblen Bestandteile der über $GF(q)$ irreduziblen Darstellung $H(\mathfrak{G}_p)$. Diese sind nichtlinear, haben daher alle denselben Grad (Hilfssatz 3), welcher wegen $q \neq p$ durch p teilbar ist. Also gilt $2m = pj$ mit einer geeigneten ganzen Zahl j.

Nach Hilfssatz II.3 ist $H(\mathfrak{G}_p)$ eine Untergruppe der symplektischen Gruppe $C(2m, q)$. Daraus folgt nun

$$p^g \mid |C(2m, q)| = (q^{2m}-1)\, q^{2m-1} (q^{2m-2}-1)\, q^{2m-3} \ldots q^3 (q^2-1)\, q$$

und wegen $q \neq p$ dann

$$p^g \mid (q^{2m}-1)\,(q^{2m-2}-1) \ldots (q^2-1).$$

(Die Ordnung von $C(2m, q)$ entnehmen wir aus v. d. WAERDEN [17], S. 10.)

Zwischen p und q bestehen nun mehrere Bindungen:

Zunächst ist $q \mid p^f - 1$, also

$$q < p^f. \tag{1}$$

Sei r die Ordnung von q mod p, also

$$q^r = 1 + y p^x \quad \text{mit} \quad p \nmid y \text{ und } x \geqq 1. \tag{2}$$

Dann ist $r \mid \varphi(p) = p-1$, daher

$$r \leqq p-1. \tag{3}$$

Aus (2) folgt $p^x < q^r$, dann mit (1) $p^{x/r} < q < p^f$, also $x/r < f$ und daher

$$x \leqq rf - 1. \tag{4}$$

Nun wollen wir die maximale p-Potenz, welche in $|C(2m, q)|$ aufgeht, abschätzen. Dabei bedienen wir uns einer Rechnung, die BURNSIDE im Spezialfall $f=1$ bei einer ähnlichen Gelegenheit durchgeführt hat (BURNSIDE [2]).

Aus $q^r = 1 + y p^x$ folgt für $v = rkp^j$ mit $p \nmid k$

$$q^v = (1 + y p^x)^{kp^j} = 1 + ky p^{x+j} + \binom{kp^j}{2} y^2 p^{2x} + \cdots.$$

Wegen $p \neq 2$ ist also $p^{x+j} \top q^v - 1$.

Sei c die ganze Zahl mit

$$cr \leqq 2m < (c+1)r. \tag{5}$$

Wir bestimmen jetzt die höchste p-Potenz p^u, welche in

$$(q^{2m}-1)\,(q^{2m-1}-1) \ldots (q^2-1)\,(q-1)$$

aufgeht. Durch p teilbar sind genau die c Faktoren $q^{ri}-1$ mit $i \leqq c$, und jeder von diesen liefert den Beitrag p^x. Je einen weiteren Faktor p erhalten

wir aus den $[c/p]$ Gliedern mit $p|i$, noch je einen weiteren Faktor p aus den $[c/p^2]$ Gliedern mit $p^2|i$ usw. Schließlich bekommen wir so

$$u = cx + \left[\frac{c}{p}\right] + \left[\frac{c}{p^2}\right] + \cdots.$$

Ist $c = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_s p^s$, so wird

$$u = cx + a_1 + a_2(1+p) + \cdots + a_s(1+p+\cdots+p^{s-1}) = cx + \frac{c - a_0 - a_1 - \cdots - a_s}{p-1}$$

und daher

$$u \leqq cx + \frac{c-1}{p-1}. \tag{6}$$

Nun sei zunächst $r = 1$. Dann ist nach (4) $x \leqq f-1$ und nach (5) $c \leqq 2m$. Wir nehmen an, daß unsere Behauptung nicht stimmt, also $g > f\left(\frac{3n}{p} - 1\right)$ ist und bekommen mit (6)

$$f\left(\frac{3n}{p} - 1\right) < g \leqq u \leqq 2m(f-1) + \frac{2m-1}{p-1}.$$

Mit $n \geqq q^m$ und $2m = jp$ wird daher

$$f\left(\frac{3}{p} q^{jp/2} - 1\right) < jp(f-1) + \frac{jp-1}{p-1}.$$

Multiplikation mit p liefert

$$f(3q^{jp/2} - p) < jp^2(f-1) + \frac{p(jp-1)}{p-1} < jp^2\left(f - 1 + \frac{1}{p-1}\right) < jp^2 f$$

oder

$$3q^{jp/2} < jp^2 + p = p(jp+1). \tag{I}$$

Erst recht ist dann

$$3q^{jp/2} < 2j^2p^2, \quad \text{also mit} \quad jp = 2m = z \qquad 3q^{z/2} < 2z^2.$$

Dabei interessieren uns nur die geraden z. Im ungünstigsten Falle $q = 2$ bekommen wir nun $3\,2^{z/2} < 2z^2$. Eine einfache Rechnung zeigt, daß dies für $z \geqq 16$ nicht stimmt. Es ist leicht zu sehen, daß die restlichen j, p mit $z = jp \leqq 14$, geradem j und $p \neq 2$ die Ungleichung (I) nicht erfüllen. Damit sind wir zu einem Widerspruch gekommen, wodurch im Falle $r = 1$ unsere Behauptung bewiesen ist.

Nun sei $r > 1$. Nach (3) und (4) ist $x \leqq rf - 1 \leqq (p-1)f - 1$, nach (5) $c \leqq m$. Wieder nehmen wir an, es sei entgegen unserer Behauptung $g > f\left(\frac{3n}{p} - 1\right)$. Dann wird nach (6)

$$f\left(\frac{3n}{p} - 1\right) < g \leqq u \leqq m((p-1)f - 1) + \frac{m-1}{p-1}.$$

Unter Beachtung von $n \geqq q^m$ und $2m = jp$ folgt

$$f\left(\frac{3}{p} q^{jp/2} - 1\right) < \frac{jp}{2}((p-1)f - 1) + \frac{jp/2 - 1}{p-1} < \frac{jp}{2}(p-1)f,$$

daher

$$\frac{3}{p} q^{jp/2} < \frac{jp}{2}(p-1)+1.$$

Nun wird

$$3q^{jp/2} < \frac{jp^2}{2}(p-1)+p. \tag{II}$$

Daraus ergibt sich wegen $q \geqq 2$

$$3\,2^{jp/2} < \frac{jp^3}{2} - \frac{jp^2}{2} + p < \frac{jp^3}{2} < \frac{j^3p^3}{2}.$$

Mit $jp = 2m = z$ erhalten wir die Ungleichung $3\,2^{z/2+1} < z^3$, welche für $z > 20$ nicht erfüllt ist. Nun haben wir noch nachzuprüfen, welche Paare j, p mit $jp \leqq 20$ die Ungleichung (II) erfüllen; dabei fallen wegen $p \neq 2$ noch die reinen 2-Potenzen weg. Es ergibt sich, daß (II) nur für $p = 5$, $j = 2$ mit $q = 2$ erfüllt ist. Die genaue 5-Potenz, welche in $(2^{10}-1)(2^9-1)\ldots(2^2-1)$ aufgeht, ist aber 5^2. Daher gilt in diesem Falle wegen $n \geqq 2^5$ die Ungleichung $g \leqq 2 < f\left(\frac{3}{5}2^5 - 1\right) \leqq f\left(\frac{3n}{5} - 1\right)$, was zu zeigen war.

Damit haben wir den Beweis von Satz 13 beendet.

Für $p = 2$ gilt ein ähnlicher Satz:

Satz 14. Sei $\mathfrak{G}$ auflösbar und vollständig reduzibel vom Grad n über $GF(2^f)$. Ist 2^g die höchste 2-Potenz, welche die Ordnung von $\mathfrak{G}$ teilt, so ist $g \leqq f(n-1)$.

Beweis. Der gruppentheoretische Teil des Beweises verläuft wie bei Satz 13. Wir wollen uns daher kurz fassen und geben nur die Abweichungen bei den Abschätzungen an.

a) Der Schluß verläuft ebenso wie bei Satz 13 mit $f(n_i - 1)$ an der Stelle von $f(3n_i/p - 1)$.

b) Nun wird $d \leqq f(n-k)$ und $e < k$, also $e \leqq k-1$ und dann

$$g \leqq f(n-k) + k - 1 \leqq f(n-k+k-1) = f(n-1).$$

c) Jetzt erhalten wir $d \leqq f(n-k)$ und wieder $e \leqq k-1$, also wie eben $g \leqq f(n-1)$.

d) Statt S. 505 unten muß es jetzt heißen:

$$g \leqq f\left(k - 1 + \binom{n}{k} - 1\right) < f(n-1).$$

Der Fall, daß $\mathfrak{N}$ über $GF(2^f)$ nicht in absolut irreduzible Teile zerfällt, kann wegen $q \neq 2$ nicht eintreten. Daher entfällt jetzt die Betrachtung von S. 506.

e) Der Fall $n = 1$ ist trivial. Angenommen, es sei $g > f(n-1)$. Dann erhalten wir wegen $n > 1$

$$n > 2^{g-1} > 2^{f(n-1)-1}.$$

Daraus folgt $f(n-1) - 1 < n$ und daher $f \leqq 3$.

Für $f=1$ bekommen wir $n>2^{n-2}$, also $n=2$ oder $n=3$. Im Falle $n=2$ ist aber wegen $2\top|GL(2,2)|$ sicher $g\leqq 1$, daher unsere Behauptung richtig. Im Falle $n=3$ ist zwar $2^3\top|GL(3,2)|$, aber die Gruppe $GL(3,2)$ ist nicht auflösbar. Die auflösbaren Untergruppen von $GL(3,2)$, welche die volle 2-Sylow-Gruppe von $GL(3,2)$ umfassen, sind isomorph zur symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_4$ oder zu der 2-Sylow-Gruppe selbst. Diese Gruppen sind aber nicht vollständig reduzibel, da sie Normalteiler der Ordnung 4 besitzen. Also gibt es keine auflösbare, vollständig reduzible Untergruppe $\mathfrak{G}$ von $GL(3,2)$ mit $2^3\top|\mathfrak{G}|$. Daher ist $g\leqq 2$ und unsere Behauptung erfüllt.

Im Falle $f=2$ erhalten wir $n>2^{2n-3}$ und daher $n=1$; für $f=3$ ergibt sich $n>2^{3n-4}$ und dann ebenfalls $n=1$.

f) Nun haben wir $r=1$, also

$$x\leqq f-1 \tag{4'}$$

und

$$c\leqq 2m<c+1, \tag{5'}$$

also $c=2m$.

Sei zunächst $q=1+y2^x$ mit $2\nmid y$ und $x>1$. Dann ist mit $v=k2^j$ und $2\nmid k$

$$q^v\equiv 1+k\,y\,2^{x+j} \bmod 2^{j-1+2x}.$$

Wegen $j-1+2x>x+j$ ist nun wieder $2^{x+j}\top q^v-1$. Unsere frühere Bestimmung von u bleibt daher richtig und liefert

$$u\leqq c\,x+c-1. \tag{6'}$$

Wir nehmen nun wieder an, daß unsere Behauptung nicht richtig ist, also $g>f(n-1)$ gilt. Mit (4'), (5') und (6') ergibt das

$$f(n-1)<g\leqq u\leqq c\,x+c-1\leqq 2m(f-1)+2m-1<2mf.$$

Unter Beachtung von $n\geqq q^m\geqq 3^m$ folgt nun $3^m<2m+1$. Diese Ungleichung ist aber für kein $m\geqq 0$ erfüllt. Damit ist der gewünschte Widerspruch erreicht.

Endlich bleibt noch der Fall $x=1$ zu behandeln. (Burnside hatte in [2] diesen Fall übersehen; jedoch läßt sich die Lücke bei ihm unschwer schließen.) Nun ist $r=1$ und $q=1+2y$ mit $2\nmid y$. Wieder haben wir $n\geqq q^m\geqq 3^m$.

Es ist $q^2-1=4y(y+1)$, also mit $y+1=a2^w$ und $2\nmid a$ dann $2^{w+2}\top q^2-1$. Für $v=k2^j$ mit $2\nmid k$ und $j\geqq 1$ erhalten wir daher

$$q^v\equiv 1+a\,k\,y\,2^{w+j+1} \bmod 2^{2w+j+2},$$

also $2^{w+j+1}\top q^v-1$.

Für die maximale 2-Potenz 2^b, welche in

$$(q^{2m}-1)(q^{2m-2}-1)\dots(q^2-1)$$

aufgeht, bekommen wir, entsprechend den früheren Überlegungen

$$b=m(w+2)+\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{m}{2^2}\right\rfloor+\dots<m(w+2)+m=m(w+3).$$

Nun nehmen wir an, es sei entgegen unserer Behauptung $g > f(n-1)$. Dann wird

$$f(3^m - 1) \leq f(n-1) < g \leq b \leq m(w+3).$$

Aus $q \mid 2^f - 1$ erhalten wir $q < 2^f$. Andererseits ist $q = a\,2^{w-1} - 1 \geq 2^w$, daher also $w < f$. Es folgt $w \leq f-1$ und $f(3^m-1) < m(f+2) \leq 2mf$, also $3^m < 2m+1$. Die letzte Ungleichung ist aber für kein $m \geq 0$ erfüllt. Damit haben wir die Annahme $g > f(n-1)$ zum Widerspruch geführt und den Beweis von Satz 14 abgeschlossen.

Aus Satz 13 folgt, daß für $n \leq p/3$ die Ordnung von $\mathfrak{G}$ zu p teilerfremd ist. Diese Aussage wollen wir nun noch verschärfen:

Satz 15. Sei $\mathfrak{G}$ auflösbar und vollständig reduzibel vom Grad n über $GF(p^f)$. Ist $n \leq p-1$, so ist die Ordnung von $\mathfrak{G}$ zu p teilerfremd, ausgenommen den Fall, daß $n = p-1$ und p eine Fermatsche Primzahl ist.

Beweis. Wir gehen die Stufen des Beweises von Satz 13 durch und geben die Änderungen an:

a) Da die irreduziblen Bestandteile p-freie Ordnungen haben, gilt dies auch für $\mathfrak{G}$.

b) Nun ist $d = 0$ und $k < p$, daher $e = 0$ und dann $g = 0$.

c) Aus $d = e = 0$ folgt wieder $g = 0$.

d) Mit $g_1 = g_2 = 0$ ergibt sich $g = 0$, und zwar in allen unter d) betrachteten Fällen.

e) Wie auf S. 507 erhalten wir aus $n \leq p-1$ entweder $g = 0$ oder $p = n+1 = q^m + 1$. Dann ist notwendig $q = 2$ und p eine Fermatsche Primzahl.

f) Wegen $n \geq q^m$ und $p \mid 2m$ bekommen wir $2^m \leq q^m \leq n \leq p-1 \leq 2m-1$. Diese Ungleichung ist jedoch für kein $m \geq 0$ erfüllt, so daß dieser Fall unter der Voraussetzung $n \leq p-1$ nicht eintreten kann.

Damit haben wir alle möglichen Fälle betrachtet und Satz 15 bewiesen.

Es sei noch bemerkt, daß ein direkter Beweis von Satz 15 gegenüber dem Beweis von Satz 13 wesentliche Vereinfachungen gestattet; denn da in Satz 15 der Parameter f nicht in der Aussage vorkommt, können wir sofort zu einem genügend großen Galois-Feld übergehen, über welchem alle zu betrachtenden Normalteiler in absolut irreduzible Bestandteile zerfallen.

Schließlich vermerken wir noch, daß Satz 15 wenigstens für Primzahlen p, die keine Fermat-Zahlen sind, scharf ist. Denn es gibt stets irreduzible monomiale Gruppen vom Grad p, deren Ordnung dann notwendig durch p teilbar ist.

§ 7. Hauptreihen auflösbarer Gruppen

In diesem Paragraphen sei $\mathfrak{G}$ stets endlich.

Auf jedem Hauptfaktor $\mathfrak{H}$ der Ordnung p^n von $\mathfrak{G}$ bewirkt $\mathfrak{G}$ bei Transformation eine Automorphismengruppe $\mathfrak{G}(\mathfrak{H})$, welche zu einer auflösbaren, über $GF(p)$ irreduziblen Untergruppe von $GL(n, p)$ isomorph ist. Uns interessiert der Durchschnitt $\mathfrak{F}(p)$ aller Kerne der homomorphen Abbildungen

$\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}(\mathfrak{H})$, wenn $\mathfrak{H}$ alle Hauptfaktoren von $\mathfrak{G}$ von p-Potenzordnung (kurz: p-Hauptfaktoren) durchläuft. Unsere späteren Aussagen werden vielfach die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}(p)$ betreffen.

Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt bekanntlich p-nilpotent, wenn sie ein invariantes p-Sylow-Komplement ${}_p\mathfrak{G}$ besitzt.

Hilfssatz 6. Sei $\mathfrak{G}$ eine p-auflösbare Gruppe. Dann ist der Zentralisator aller p-Hauptfaktoren von $\mathfrak{G}$ der maximale p-nilpotente Normalteiler $\mathfrak{F}(p)$ von $\mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{G}$ auflösbar, so ist der maximale nilpotente Normalteiler $\mathfrak{F}$ der Zentralisator aller Hauptfaktoren.

Beweis. Offenbar ist die Vereinigung p-nilpotenter Normalteiler $\mathfrak{N}_i$ $(i = 1, 2)$ von $\mathfrak{G}$ wieder ein solcher; denn die Vereinigung der (als charakteristische Untergruppen der $\mathfrak{N}_i$) in $\mathfrak{G}$ invarianten p-Sylow-Komplemente ${}_p\mathfrak{N}_i$ der $\mathfrak{N}_i$ ergibt ein invariantes p-Sylow-Komplement von $\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2$.

a) Sei $\mathfrak{N}$ ein p-nilpotenter Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Wir haben zu zeigen, daß $\mathfrak{N}$ alle p-Hauptfaktoren von $\mathfrak{G}$ zentralisiert. Zu diesem Zweck bilden wir die Faktorgruppe $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/{}_p\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ nach dem p-Sylow-Komplement ${}_p\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$. Da ${}_p\mathfrak{N}$ eine zu p teilerfremde Ordnung hat, genügt der Nachweis unserer Behauptung für $\overline{\mathfrak{G}}$. Die Automorphismengruppen auf den p-Hauptfaktoren stellen sich nun dar als lineare irreduzible Gruppen über $GF(p)$, besitzen daher keinen von $\mathfrak{E}$ verschiedenen Normalteiler von p-Potenzordnung (Hilfssatz 1). Daher bewirkt $\mathfrak{N}/{}_p\mathfrak{N}$ auf jedem p-Hauptfaktor den identischen Automorphismus, was zu zeigen war.

b) Nun sei $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$, der auf jedem p-Hauptfaktor von $\mathfrak{G}$ den identischen Automorphismus bewirkt. Dann erleiden insbesondere die p-Hauptfaktoren von $\mathfrak{N}$ selbst unter $\mathfrak{N}$ nur den identischen Automorphismus.

Wir zeigen nun, daß eine p-auflösbare Gruppe $\mathfrak{G}$, welche alle ihre p-Hauptfaktoren zentralisiert, p-nilpotent ist. Dazu verwenden wir einen Induktionsschluß nach der Ordnung von $\mathfrak{G}$.

Hat $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler $\mathfrak{M}$ von zu p teilerfremder Ordnung, so ist nach unserer Induktionsannahme $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ p-nilpotent, dann aber auch $\mathfrak{G}$ selbst. Hat aber $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler $\mathfrak{L}$ von der Ordnung p^n, so ist $n = 1$, da alle p-Hauptfaktoren von $\mathfrak{G}$ zentralisiert werden. Für $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$ gilt nach der Induktionsannahme unsere Behauptung, so daß ${}_p\mathfrak{G}\mathfrak{L}$ in $\mathfrak{G}$ invariant ist[6]). Da aber $\mathfrak{L}$ im Zentrum von $\mathfrak{G}$ liegt, folgt nun ${}_p\mathfrak{G}\mathfrak{L} = {}_p\mathfrak{G} \times \mathfrak{L} \lhd \mathfrak{G}$ und dann ${}_p\mathfrak{G} \lhd \mathfrak{G}$, was zu beweisen war.

Der Durchschnitt aller $\mathfrak{F}(p)$, wenn p die Primteiler von $|\mathfrak{G}|$ durchläuft, ist der maximale nilpotente Normalteiler $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{G}$ auflösbar, so ist also $\mathfrak{F}$ der Zentralisator aller Hauptfaktoren von $\mathfrak{G}$.

Satz 16. Sei $\mathfrak{G}$ p-auflösbar. Genau dann ist $l_p(\mathfrak{G}) = 1$, wenn $\mathfrak{G}$ auf allen p-Hauptfaktoren Automorphismengruppen von zu p teilerfremder Ordnung bewirkt.

Beweis. Ist $l_p(\mathfrak{G}) = 1$, so gibt es eine Normalteilerkette $\mathfrak{E} \lhd \mathfrak{N}_1 \trianglelefteq \mathfrak{N}_2 \lhd \mathfrak{G}$ von $\mathfrak{G}$ mit $p \nmid |\mathfrak{N}_1|$, $p \nmid |\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_2|$ und $p^g = |\mathfrak{N}_2/\mathfrak{N}_1|$. Dann ist $\mathfrak{G}_p \leqq \mathfrak{N}_2 \leqq \mathfrak{F}(p)$.

[6]) ${}_p\mathfrak{G}$ existiert, da $\mathfrak{G}$ p-auflösbar ist.

Daher wird jeder p-Hauptfaktor von $\mathfrak{G}$ durch alle p-Sylow-Gruppen $\mathfrak{G}_p$ zentralisiert, erfährt also eine Automorphismengruppe von zu p teilerfremder Ordnung.

Bewirkt umgekehrt $\mathfrak{G}$ auf allen p-Hauptfaktoren Automorphismengruppen von zu p teilerfremder Ordnung, so gilt $\mathfrak{G}_p \leq \mathfrak{F}(p)$. Dann ist $\mathfrak{F}(p)/_p\mathfrak{F}(p) \cong \mathfrak{G}_p$, und $\mathfrak{E} \lhd {}_p\mathfrak{F}(p) \lhd \mathfrak{F}(p) \lhd \mathfrak{G}$ liefert eine Normalteilerkette von $\mathfrak{G}$, in der alle p-Hauptfaktoren hintereinander vorkommen, so daß $l_p(\mathfrak{G}) = 1$ gilt.

Aus Satz 16 folgen sofort zwei weitere Aussagen:

Satz 17. Ist $\mathfrak{G}$ p-auflösbar und $\mathfrak{G}_p$ abelsch, so gilt $l_p(\mathfrak{G}) = 1$.

Beweis. Der Satz ergibt sich aus Satz 16.

Satz 17 ist enthalten in einer allgemeineren Aussage über $l_p(\mathfrak{G})$, welche P. HALL und G. HIGMAN in [8] angegeben haben. Ist nämlich $c_p(\mathfrak{G})$ die Klasse von $\mathfrak{G}_p$, so gilt $l_p(\mathfrak{G}) \leq c_p(\mathfrak{G})$.

Satz 18. Ist $\mathfrak{G}$ auflösbar und $r_p(\mathfrak{G}) \leq p-1$, so gilt $l_p(\mathfrak{G}) = 1$, ausgenommen den Fall, daß $r_p(\mathfrak{G}) = p-1$ und p eine Fermatsche Primzahl ist.

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus den Sätzen 15 und 16.

Die Gruppen vom Rang 1 (die überauflösbaren Gruppen) haben zwei bemerkenswerte Eigenschaften:

Die Sylow-Gruppe zum größten Primteiler der Gruppenordnung ist invariant (P. HALL [7]).

Die Kommutatorgruppe $\mathfrak{G}'$ ist nilpotent (WENDT [19]).

In einer früheren Arbeit (HUPPERT [9]) hatte der Verfasser analoge Sätze für Gruppen vom Rang 2 und 3 angegeben (Satz 14 bis Satz 17 in [9]). Unser systematisches Studium der linearen auflösbaren Gruppen erlaubt jetzt die Aufstellung entsprechender Sätze bei beliebigem Rang.

Wir befassen uns zunächst mit der Verallgemeinerung der ersten Aussage. Dabei wird es sich um eine Abschätzung von $l_p(\mathfrak{G})$ durch den p-Rang $r_p(\mathfrak{G})$ handeln. Allerdings ist zu bemerken, daß dies nur ein schwacher Ersatz für die invariante p-Sylow-Gruppe ist. Denn selbst dann, wenn $l_p(\mathfrak{G}) = 1$ für alle Primteiler p von $|\mathfrak{G}|$ gilt, hat $\mathfrak{G}$ nicht notwendig eine invariante Sylow-Gruppe; dies zeigt das Beispiel $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{A}_4$ des direkten Produktes der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_3$ mit der alternierenden Gruppe $\mathfrak{A}_4$.

Wir zeigen zunächst

Satz 19. Sei $\mathfrak{G}$ auflösbar vom p-Rang $r_p(\mathfrak{G})$. Für $p > 2$ gilt dann

$$r_p\big((\mathfrak{G}/\mathfrak{F}(p)\big) \leq \tfrac{3}{p}\, r_p(\mathfrak{G}) - 1,$$

für $p = 2$

$$r_2\big(\mathfrak{G}/\mathfrak{F}(2)\big) \leq r_2(\mathfrak{G}) - 1.$$

Beweis. Sei $\mathfrak{H}$ ein Hauptfaktor von $\mathfrak{G}$ mit $|\mathfrak{H}| = p^n$. Dann ist $n \leq r_p(\mathfrak{G})$. Die Gruppe $\mathfrak{G}(\mathfrak{H})$ ist isomorph zu einer auflösbaren, über $GF(p)$ irreduziblen Untergruppe von $GL(n, p)$. Daher geht für $p > 2$ nach Satz 13 in $|\mathfrak{G}(\mathfrak{H})|$ die

Primzahl p höchstens in der $(3n/p-1)$-ten Potenz auf. Insbesondere ist dann

$$r_p(\mathfrak{G}(\mathfrak{H})) \leq \frac{3n}{p} - 1 \leq \frac{3}{p} r_p(\mathfrak{G}) - 1.$$

Da aber $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}(p)$ Untergruppe des direkten Produktes aller der $\mathfrak{G}(\mathfrak{H})$ (bei festgehaltenem p) ist, folgt nun

$$r_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{F}(p)) \leq \frac{3}{p} r_p(\mathfrak{G}) - 1.$$

Die Aussage für $p=2$ ergibt sich unter Benutzung von Satz 14 in gleicher Weise.

Jetzt folgt leicht die angekündigte Abschätzung von $l_p(\mathfrak{G})$ durch $r_p(\mathfrak{G})$:

Satz 20. Sei $\mathfrak{G}$ auflösbar vom p-Rang $r_p(\mathfrak{G})$ mit $p \geq 3$. Ist i eine ganze Zahl mit

$$\frac{3^i}{p^i} r_p(\mathfrak{G}) - \left(\frac{3^{i-1}}{p^{i-1}} + \frac{3^{i-2}}{p^{i-2}} + \cdots + \frac{3}{p} + 1 \right) \leq p-2,$$

so gilt $l_p(\mathfrak{G}) \leq i+1$.

Beweis. Nach Satz 19 haben wir $r_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{F}(p)) \leq \frac{3}{p} r_p(\mathfrak{G}) - 1$. Die p-Hauptfaktoren von $\mathfrak{G}$ unterhalb $\mathfrak{F}(p) = \mathfrak{F}^1(p)$ lassen sich zu einem p-Abschnitt zusammenfassen, da $\mathfrak{F}(p)$ p-nilpotent ist. Nun betrachten wir denjenigen Normalteiler $\mathfrak{F}^2(p)$ von $\mathfrak{G}$, welcher dem maximalen p-nilpotenten Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}^1(p)$ entspricht. Nochmalige Anwendung von Satz 19 ergibt

$$r_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{F}^2(p)) \leq \frac{3}{p} \left(\frac{3}{p} r_p(\mathfrak{G}) - 1 \right) - 1 = \frac{3^2}{p^2} r_p(\mathfrak{G}) - \frac{3}{p} - 1.$$

Entspricht $\mathfrak{F}^i(p)$ dem maximalen p-nilpotenten Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}^{i-1}(p)$, so kommen wir schließlich zu

$$r_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{F}^i(p)) \leq \frac{3^i}{p^i} r_p(\mathfrak{G}) - \left(\frac{3^{i-1}}{p^{i-1}} + \frac{3^{i-2}}{p^{i-2}} + \cdots + \frac{3}{p} + 1 \right).$$

Die p-Hauptfaktoren zwischen $\mathfrak{F}^j(p)$ und $\mathfrak{F}^{j+1}(p)$ lassen sich zusammenwerfen, so daß in einer geeigneten Hauptreihe von $\mathfrak{G}$ unterhalb $\mathfrak{F}^i(p)$ höchstens i p-Abschnitte vorkommen. Ist nun i gemäß der obenstehenden Bedingung gewählt, so ist $r(\mathfrak{G}/\mathfrak{F}^i(p)) \leq p-2$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}^i(p)$ trägt daher höchstens noch einen weiteren p-Abschnitt bei (s. Satz 18). Damit haben wir $l_p(\mathfrak{G}) \leq i+1$ bewiesen.

Satz 20a. Stets ist $l_p(\mathfrak{G}) \leq r_p(\mathfrak{G})$.

Beweis. Dies ergibt sich nach dem gleichen Verfahren wie Satz 20, wenn wir die aus Satz 19 für alle p folgende Ungleichung $r_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{F}(p)) \leq r_p(\mathfrak{G}) - 1$ verwenden.

Wesentlich bessere Abschätzungen erhalten wir für $p>3$:

Satz 20b. Für $p>3$ gilt $l_p(\mathfrak{G}) \leq \left[p/3 \log \frac{r_p(\mathfrak{G})}{p-1} \right] + 2$.

Beweis. Die Ungleichung

$$\frac{3^i}{p^i} r_p(\mathfrak{G}) - \left(\frac{3^{i-1}}{p^{i-1}} + \frac{3^{i-2}}{p^{i-2}} + \cdots + \frac{3}{p} + 1 \right) \leq p-2$$

ist sicher dann erfüllt, wenn wir i so wählen, daß

$$\frac{3^i}{p^i} r_p(\mathfrak{G}) - 1 \leq p-2$$

ist, d.h. $i \geq {}_{p/3}\log \frac{r_p(\mathfrak{G})}{p-1}$. Aus Satz 20 folgt dann die Behauptung.

Aus den Ergebnissen von P. HALL und G. HIGMAN in [8] lassen sich ebenfalls Ungleichungen zwischen $r_p(\mathfrak{G})$ und $l_p(\mathfrak{G})$ herleiten:

Sei $r_p(\mathfrak{G}) = r$. Dann hat jeder p-Hauptfaktor $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ höchstens r Erzeugende. Eine p-Sylow-Gruppe der auf dem p-Hauptfaktor $\mathfrak{H}$ bewirkten Automorphismengruppe $\mathfrak{G}(\mathfrak{H})$ besteht daher (bezüglich einer geeigneten Basis von $\mathfrak{H}$) aus Dreiecksmatrizen vom Grad $h \leq r$ mit Diagonalelementen 1 (SPEISER [15], S. 222). Bekanntlich hat eine solche Gruppe höchstens die Klasse $r-1$ (GRÜN [6], Satz 7). Bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}_p^{[r-1]}$ das $r-1$-te Glied der absteigenden Zentralreihe von $\mathfrak{G}_p$, so gilt daher $\mathfrak{G}_p^{[r-1]} \leq \mathfrak{C}(\mathfrak{H})$. Es folgt also

$$\mathfrak{G}_p^{[r-1]} \leq \cap\, \mathfrak{C}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{F}(p).$$

Nach P. HALL und G. HIGMAN [8] ist bei einer p-auflösbaren Gruppe die p-Länge durch die Klasse der p-Sylow-Gruppe beschränkt, und zwar, wenn wir mit l_p die p-Länge, mit c_p die Klasse der p-Sylow-Gruppen bezeichnen:

$c_p \geq p^{l_p-1}$, falls $p \neq 2$ und p keine Fermat-Zahl ist ([8], S. 29, Corollar);
$c_p \geq ((p-2)^{l_p}-1)/(p-3)$, falls $p \neq 3$ und p eine Fermat-Zahl ist;
$c_3 \geq 2^{l_3-1}$;
$c_2 \geq l_2$ ([8], S. 7, Theorem 1.2.6 (ii)).

In unserem Falle ergibt sich daher[7])

$$l_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{F}(p)) \leq \begin{cases} 1 + {}_p\log(r-1) & \text{für } p \neq 2,\ p \text{ keine Fermat-Zahl} \\ {}_{p-2}\log(r-1(p-3)+1) & \text{für } p \neq 3,\ p \text{ Fermat-Zahl} \\ 1 + {}_2\log(r-1) & \text{für } p = 3 \\ r-1 & \text{für } p = 2. \end{cases}$$

Für $l_p(\mathfrak{G})$ folgen dann, wenn wir wieder r durch $r_p(\mathfrak{G})$ ersetzen, die Abschätzungen

$$l_p(\mathfrak{G}) \leq \begin{cases} 2 + {}_p\log(r_p(\mathfrak{G})-1) & \text{für } p \neq 2,\ p \text{ keine Fermat-Zahl} \\ 1 + {}_{p-2}\log(r_p(\mathfrak{G})-1)(p-3)+1) & \text{für } p \neq 3,\ p \text{ Fermat-Zahl} \\ 2 + {}_2\log(r_3(\mathfrak{G})-1) & \text{für } p = 3 \\ r_2(\mathfrak{G}) & \text{für } p = 2. \end{cases}$$

Von diesen Ungleichungen sind alle für große $r_p(\mathfrak{G})$ schärfer als die Abschätzungen der Sätze 20a/b. Wir formulieren daher die Ergebnisse gesondert:

[7]) ${}_t\log r$ sei der Logarithmus von r zur Basis t.

Satz 20c. Es gilt

$$l_p(\mathfrak{G}) \leq \begin{cases} 2 + {}_p\log r_p(\mathfrak{G}) & \text{für } p \neq 2,\ p \text{ keine Fermat-Zahl} \\ 1 + {}_{p-2}\log\left(r_p(\mathfrak{G})\,(p-3)+1\right) & \text{für } p \neq 3,\ p \text{ Fermat-Zahl} \\ 2 + {}_2\log r_3(\mathfrak{G}) & \text{für } p = 3. \end{cases}$$

Die von P. Hall und G. Higman in [8] angegebene Abschätzung von l_p durch c_p weist zusammen mit Satz 20 auf die zentrale Bedeutung der p-Länge für die Theorie der auflösbaren Gruppen hin.

Nun behandeln wir die Verallgemeinerung der zweiten Aussage von überauflösbaren Gruppen auf auflösbare Gruppen von beliebigem Rang.

Satz 21. Sei $\mathfrak{G}$ auflösbar mit $r(\mathfrak{G}) = r$. Dann ist $\mathfrak{G}^{(k)}$ nilpotent für $k \geq \operatorname{Min}\{2r, 6\,{}_2\log r\}$.

Beweis. Ist $\mathfrak{H}$ ein Hauptfaktor der Ordnung p^n von $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{G}(\mathfrak{H})$ isomorph zu einer über $GF(p)$ irreduziblen, auflösbaren Untergruppe von $GL(n, p)$. Dabei gilt $n \leq r$. Nach Satz 9 ist $k\left(\mathfrak{G}(\mathfrak{H})\right) \leq 2r$. Beachten wir, daß $\mathfrak{G}(\mathfrak{H})$ über $GF(p)$ irreduzibel ist, daher über einer geeigneten Erweiterung von $GF(p)$ vollständig reduzibel ist in absolut irreduzible Teile, so liefert Satz 10 $k\left(\mathfrak{G}(\mathfrak{H})\right) \leq 6\,{}_2\log r$. Ist $k = \operatorname{Min}\{2r, 6\,{}_2\log r\}$, so ist also $\mathfrak{G}(\mathfrak{H})^{(k)} = \mathfrak{E}$ für alle Hauptfaktoren $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$. Daher zentralisiert $\mathfrak{G}^{(k)}$ alle Hauptfaktoren, woraus die Behauptung $\mathfrak{G}^{(k)} \leq \mathfrak{F}$ folgt.

Einen Spezialfall betrachten wir noch gesondert:

Satz 22. Sei $\mathfrak{G}$ eine auflösbare Gruppe mit lauter abelschen Sylow-Gruppen. Haben alle Sylow-Gruppen von $\mathfrak{G}$ höchstens d Erzeugende, so gilt $\mathfrak{G}^{(k+1)} = \mathfrak{E}$ für $k \geq \operatorname{Min}\{d, 6\,{}_2\log d\}$.

Beweis. Wieder sei $\mathfrak{H}$ ein Hauptfaktor der Ordnung p^n von $\mathfrak{G}$. Nach der Voraussetzung ist $n \leq d$. Da $\mathfrak{G}_p$ abelsch ist, hat $\mathfrak{G}(\mathfrak{H})$ eine zu p teilerfremde Ordnung. Nach der Bemerkung hinter Satz 11 können wir nun Satz 11 anwenden, aber auch Satz 10. Wie im Beweis von Satz 21 ergibt sich, daß $\mathfrak{G}^{(k)} \leq \mathfrak{F}$ für $k \geq \operatorname{Min}\{d, 6\,{}_2\log d\}$. Da aber $\mathfrak{F}$ im vorliegenden Fall abelsch ist, folgt $\mathfrak{G}^{(k+1)} = \mathfrak{E}$.

Für den Spezialfall $d = 2$ hat Taunt schon früher diesen Satz bewiesen (Taunt [16]; dort die schärfere Voraussetzung, daß die Ordnung von $\mathfrak{G}$ kubusfrei ist). Die Fälle $d \leq 5$ finden sich in Huppert [9] (Satz 19 in [9]).

Wir schließen noch einen Satz über den Rang $r(\mathfrak{G})$ an.

Satz 23. Ist $\mathfrak{G}$ auflösbar, so gilt $r(\mathfrak{G}/\mathfrak{F}) \leq r_{\mathfrak{G}}\left(\mathfrak{F}/\Phi(\mathfrak{G})\right)$.

Beweis. Sei $\mathfrak{H}$ ein Hauptfaktor der Ordnung p^n von $\mathfrak{G}$ zwischen $\mathfrak{F}$ und $\Phi(\mathfrak{G})$. Dann ist $n \leq r_{\mathfrak{G}}\left(\mathfrak{F}/\Phi(\mathfrak{G})\right)$. Aus Satz 12 folgt $r\left(\mathfrak{G}(\mathfrak{H})\right) \leq n \leq r_{\mathfrak{G}}\left(\mathfrak{F}/\Phi(\mathfrak{G})\right)$; denn die dortige Voraussetzung über die vollständige Reduzibilität von $\mathfrak{G}(\mathfrak{H})$ über der algebraisch abgeschlossenen Hülle von $GF(p)$ ist nun sicher erfüllt (Hilfssatz 3). Ist $\mathfrak{D}$ der Durchschnitt der Zentralisatoren aller Hauptfaktoren von $\mathfrak{G}$ zwischen $\mathfrak{F}$ und $\Phi(\mathfrak{G})$, so bekommen wir $r(\mathfrak{G}/\mathfrak{D}) \leq r_{\mathfrak{G}}\left(\mathfrak{F}/\Phi(\mathfrak{G})\right)$. Nun haben wir noch $\mathfrak{D} = \mathfrak{F}$ nachzuweisen.

Sicher gilt $\mathfrak{D} \geqq \mathfrak{F}$. Angenommen, es sei $\mathfrak{D} > \mathfrak{F}$. Dann gibt es einen Normalteiler $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{G}$ mit abelscher Faktorgruppe $\mathfrak{V}/\mathfrak{F}$, der in $\mathfrak{D}$ liegt. Da aber $\mathfrak{V}$ alle Hauptfaktoren von $\mathfrak{F}/\Phi(\mathfrak{G})$ zentralisiert, ist $\mathfrak{V}/\Phi(\mathfrak{G})$ nilpotent. Dann ist aber auch $\mathfrak{V}$ nilpotent (GASCHÜTZ [5], Satz 10). Daher folgt $\mathfrak{V} \leq \mathfrak{F}$, also $\mathfrak{V} = \mathfrak{F}$, entgegen unserer Annahme.

Es wäre wichtig, aus der Kenntnis der Hauptfaktoren von $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})$ auch auf die unterhalb von $\Phi(\mathfrak{G})$ liegenden Hauptfaktoren von $\mathfrak{G}$ zu schließen. Dies ist bisher nur unter der scharfen Bedingung $r_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{F}/\Phi(\mathfrak{G})) = 1$ gelungen (HUPPERT [9], leichte Verallgemeinerung des dortigen Satz 13).

Literatur

[1] BRAUER, R., and C. NESBITT: On the modular representations of groups of finite order I. Univ. of Toronto Studies, math. ser. **4** (1937), 21 S. — [2] BURNSIDE, W.: On groups of order $p^a q^b$ (second paper). London Math. Soc. Proc. (2) **2**, 432—437 (1904). — [3] CLIFFORD, A. H.: Representations induced in an invariant subgroup. Annals of Math. **38**, 533—550 (1937). — [4] FRUCHT, R.: Über die Darstellung endlicher abelscher Gruppen durch Kollineationen. J. reine u. angew. Math. **166**, 16—29 (1932). — [5] GASCHÜTZ, W.: Über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen. Math. Z. **58**, 160—170 (1953). — [6] GRÜN, O.: Über eine Faktorgruppe freier Gruppen I. Deutsche Math. **1**, 772—782 (1936). — [7] HALL, P.: A note on soluble groups. J. London Math. Soc. **3**, 98—105 (1928). — [8] HALL, P., and G. HIGMAN: On the p-length of p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem. Proc. London Math. Soc. **6**, 1—42 (1956). — [9] HUPPERT, B.: Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen. Math. Z. **60**, 409—434 (1954). — [10] ITÔ, N.: On the degrees of irreducible representations of a finite group. Nagoya Math. J. **3**, 5—6 (1951). — [11] ITÔ, N.: Note on A-groups. Nagoya Math. J. **4**, 79—81 (1952). — [12] JORDAN, C.: Mémoire sur les groupes résolubles. J. de Math. (7) **3**, 263—274 (1917). — [13] SCHOLZ, A., u. B. SCHOENEBERG: Einführung in die Zahlentheorie. Samml. Göschen **1955**. — [14] SCHUR, I.: Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen. J. reine u. angew. Math. **127**, 20—50 (1904). — [15] SPEISER, A.: Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 3. Aufl. 1937. — [16] TAUNT, D.: On A-groups. Proc. Cambridge philos. Soc. **45**, 24—42 (1949). — [17] v. d. WAERDEN, B. L.: Gruppen von linearen Transformationen. Ergebn. Math. **4**/2 (1935). — [18] v. d. WAERDEN, B. L.: Moderne Algebra II, 2. Aufl. 1940. — [19] WENDT, E.: Über eine specielle Classe von Gruppen. Math. Ann. **55**, 479—492 (1902). — [20] ZASSENHAUS, H.: Über endliche Fastkörper. Abh. math. Sem. Hamburg **11**, 187—220 (1936). — [21] ZASSENHAUS, H.: Beweis eines Satzes über diskrete Gruppen. Abh. math. Sem. Hamburg **12**, 289—312 (1938). — [22] ZASSENHAUS, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie I. 1937.

Mathematisches Institut der Universität Tübingen

(Eingegangen am 18. Februar 1957)

Raum und Zahl

Von Professor Dr. **Kurt Reidemeister,** Direktor am Mathematischen Institut der Universität Göttingen. Mit 31 Figuren. VII, 151 Seiten Gr.-8°. 1957.

Englische Broschur DM 19.80

Inhaltsverzeichnis: Vom Ursprung des geometrischen Denkens. — Über Mechanismen. — Analytische Geometrie. — Über den Unterschied der Gegenden im Raum: 1. Die Orientierbarkeit der Geraden und der Abstand von Punkten. 2. Die Orientierbarkeit der Ebene und der Abstand von Punkten. 3. Logik und Ontologie. — Anschauung und Begriff: 1. Das Paradox der Anschauung. 2. Ordnungszahlen. 3. Kombinatorische Topologie. — Geometrie und Logik. — Eine Begründung der Infinitesimalrechnung. — Carl Friedrich Gauss. — Geometrie und Zahlentheorie. — Prolegomena einer kritischen Philosophie.

Die Unsachlichkeit der Existenzphilosophie

Vier kritische Aufsätze. Von Professor Dr. **Kurt Reidemeister,** Direktor am Mathematischen Institut der Universität Göttingen. IV, 40 Seiten Gr.-8°. 1954.

Englische Broschur DM 4.80

Inhaltsverzeichnis: Über den Ursprung der Theologie Bultmanns. — Positivismus und Existenzphilosophie. — Die Einheit des Denkens in Philosophie und Wissenschaft. — Über den Begriff der Spekulation.

Geist und Wirklichkeit

Kritische Essays. Von Professor Dr. **Kurt Reidemeister,** Direktor am Mathematischen Institut der Universität Göttingen. III, 92 Seiten Gr.-8°. 1953.

Englische Broschur DM 8.60

Inhaltsverzeichnis: Einleitung. — **Essays.** Mensch und Wirklichkeit. Die Unverständlichkeit der Mathematik. Vom Sinn der Zeichen. Anschauung als Erkenntnisquelle. Raum und Erfahrung. Appell im Elend. Die gnostische Umwälzung. Der Narr als Karikatur der Vernunft. Über Formenschönheit. — **Prolegomena einer kritischen Philosophie.** Der Sprung als Gepflogenheit. Die Selbständigkeit des Denkens. Erfahrung und Erleuchtung. Die Wirklichkeit des Faktischen. Das erscheinende Schöne. Vernünftige Erfahrung. Schluß.

Drei Dialoge über Raum, Zeit und Kausalität

Von Professor Dr. **George Jaffé,** Department of Physics, Louisiana, State University, Louisiana, USA. 211 Seiten 8°. 1954. Steif geheftet DM 9.60

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete.

Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, W. Magnus, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden.

LXXXVI. Band: **Wahrscheinlichkeitstheorie**

Von Dr. **Hans Richter**, o. Professor für mathematische Statistik und Wirtschaftsmathematik an der Universität München. Mit 14 Textabbildungen. XII, 435 Seiten Gr.-8°. 1956. DM 66.—; Ganzleinen DM 69.60

LXXXVII. Band: **Mathematische Statistik**

Von Dr. **B. L. van der Waerden**, Professor der Mathematik an der Universität Zürich. Mit 39 Textfiguren und 13 Zahlentafeln. IX, 360 Seiten Gr.-8°. 1957. DM 46.—; Ganzleinen DM 49.60

LXXXVIII. Band: **Grundprobleme der mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen**

Von Dr. **Claus Müller**, o. Professor an der Technischen Hochschule Aachen. Mit 8 Abbildungen. IX, 344 Seiten Gr.-8°. 1957. DM 49.60; Ganzleinen DM 52.80

LXXXIX. Band: **Theorie der Riemannschen Flächen**

Von Dr. **Albert Pfluger**, Professor der Mathematik an der Eidgen. Technischen Hochschule Zürich. Mit 5 Textabbildungen. XII, 248 Seiten Gr.-8°. 1957. DM 36.—; Ganzleinen DM 39.20

XC. Band: **Tabellen zur Fourier-Transformation**

Von Dr. **Fritz Oberhettinger**, Professor der Mathematik, American University, Washington, D.C., USA. X, 214 Seiten Gr.-8°. 1957. DM 35.80; Ganzleinen DM 39.50

XCI. Band: **Primzahlverteilung**

Von Dr. **Karl Prachar**, Dozent an der Universität Wien. X, 415 Seiten Gr.-8°. 1957. DM 55.—; Ganzleinen DM 58.—

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegt ein Prospekt bei von H. R. Engelmann (J. Cramer), Weinheim/Bergstraße

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg
Printed in Germany